

Plan de l'espace

Rappel :

un plan P de l'espace est définie par un point A et deux vecteurs directeurs

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ **non colinéaires**.

les équations paramétriques de P sont :

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) : \begin{cases} x = x_A + a\alpha + a'\beta \\ y = y_A + b\alpha + b'\beta \\ z = z_A + c\alpha + c'\beta \end{cases} ; (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

trois points A, B et C non alignés de l'espace définie le plan :

$(ABC) : (A, \vec{AB}, \vec{AC})$

une droite $D(B, \vec{u})$, et un point A n'appartenant pas à D définis le plan

$P : (A, \vec{AB}, \vec{u})$.

L'équation cartésienne d'un plan P est de la forme $P : ax + by + cz + d = 0$

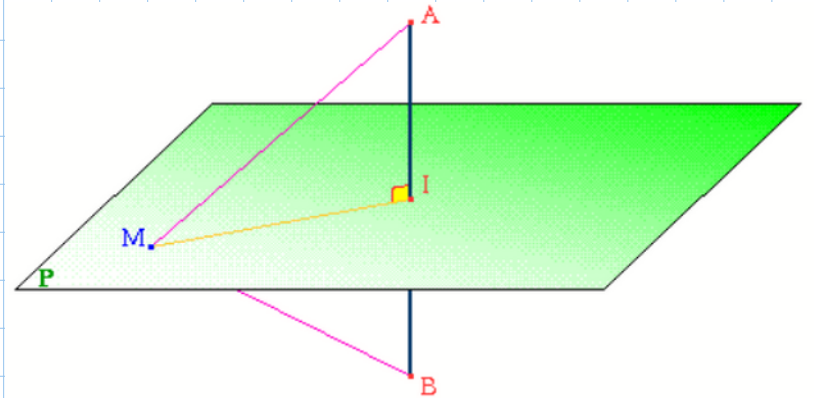
$\vec{n}_P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P .

Soit P un plan passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}_P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de P est alors :

$$P: a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de P alors $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à P .

on appelle **plan médiateur** du segment $[AB]$: le plan passant par $I = A \times B$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.



Exemple :

Montrer que $A(2, -3, 2)$; $B(0, -1, -1)$ et $C(-3, 1, 1)$ déterminent un plan dont on donnera une équation cartésienne.

Rep :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, Par suite A, B et C ne sont pas alignés.

Ainsi 3 points A, B et C déterminent un plan.

Déterminons une équation cartésienne de P

$$P: 10(x - x_A) + 13(y - y_A) + 2(z - z_A) = 0$$

$$P: 10x + 13y + 2z - 20 + 39 - 4 = 0$$

$$P: 10x + 13y + 2z + 15 = 0$$

Exemple:

Déterminer une équation cartésienne du plan
médiateur de $[AB]$ avec $A(2, -1, 0)$ et $B(1, -1, 3)$

Rep:

Soit $I = A * B$.

$$\text{Donc } I = \left(\frac{3}{2}, -1; \frac{3}{2} \right)$$

et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P

$$\text{Donc } P : -(x - x_I) + 0(y - y_I) + 3(z - z_I) = 0$$

$$\text{Donc } P : -x + 3z + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

$$\text{Ainsi } P : -x + 3z - \frac{3}{2} = 0.$$