NETSCHOOL1
ACADEMY

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Probabilité

Probabilité discrète

Rappel sur les probabilités et variables aléatoires

$p(\emptyset) = 0 \quad , \quad 0 \leq p(A) \leq 1 \quad , \quad p(\Omega) = 1$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

Variance :

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé :

$P_A(B) = P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ avec $P(A) \neq 0$.

Cas d'équiprobabilité sur Ω : $P_A(B) = p(A/B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$

Probabilités composées :

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Probabilités totales avec $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formant une partition de Ω :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

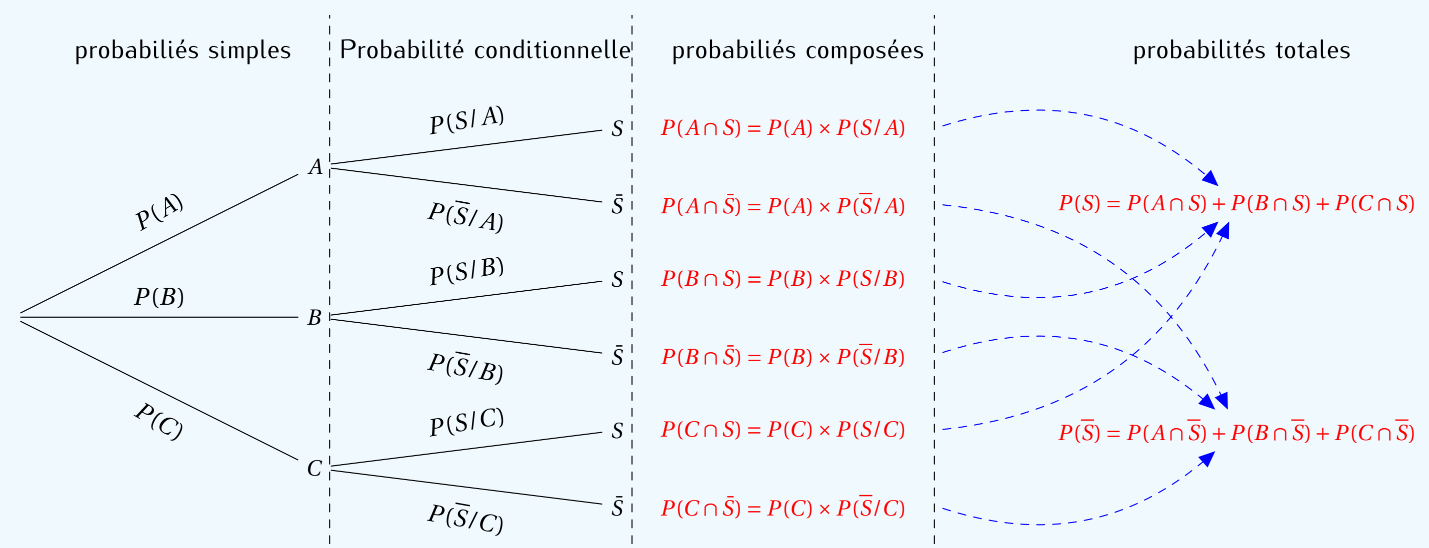
$P(B) = P(A_1) P_{A_1}(B) + P(A_2) P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) P_{A_n}(B)$

Indépendance de deux événements

A et B indépendants $\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Longleftrightarrow P_A(B) = P(B) \Longleftrightarrow P_B(A) = P(A)$

A et B indépendants $\Longleftrightarrow A$ et B indépendants $\Longleftrightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendants $\Longleftrightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Arbre de probabilité



Formule de Bayes :

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ des événements formant une partition de l'univers E tels que $p(B_i) \neq 0$, $i \in 1, 2, \ldots, n$ et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. $p_A(B_k) = \dfrac{p(B_k \cap A)}{p(A)}$

Cas particulier : Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$, $p(B) \neq 1$ et $p(A) \neq 0$. $p_A(B) = \dfrac{p(B).p_B(A)}{p(B).p_B(A) + p(\overline{B}).p_{\overline{B}}(A)}$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini. On appelle aléa numérique ou variable aléatoire tout application $X : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notation : L'événement $\{a \in E, X(a) = x_i\}$ est noté $\{X = x_i\}$.

L'ensemble $X(E)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire. On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application $P_X : X(E) \longrightarrow [0, 1]$

$x_i \longmapsto p(X = x_i)$

Conséquences :

Soit $(E, \mathscr{P}P(E), p)$ un espace probabilité fini. Si X est une v.a sur E telle que $X(E) = \{x_1, x_2, \ldots, x\}$ alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$.

Fonction de répartition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une v.a sur E. On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par
$F : x \longmapsto p(X \leq x)$.

Définition

Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

Schéma de Bernoulli

Expérience qui n'a que deux issues possibles : ń succès ż de probabilité, p et ń échec ż de probabilité 1p.
Notation : $\mathscr{B}(p)$
$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$
$E(X) = p$
$V(X) = p(1-p)$
$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X est égale au nombre de succès.
Notation: $\mathscr{B}(n;p)$; $q = 1-p$
$P(X=k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$; $k \in \{0,1,\dots,n\}$
$E(X) = np$
$V(X) = npq$
$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Probabilité continue

Variable aléatoire à densité sur I

Fonction de densité sur I : fonction f continue et positive sur I telle que : $\int_I f(t)\mathrm{d}t = 1$

♣ $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

♣ $P(X=a) = 0$

♣ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

♣ $P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t)$

♣ $E(X) = \int_I t f(t)\mathrm{d}t$

Loi uniforme

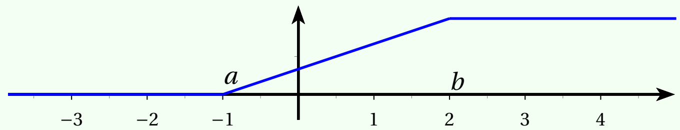
Soit un intervalle $[a,b]$, $a < b$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$. On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d]) = \int_c^d f(x)dx = \dfrac{d-c}{b-a}$
Conséquences :
Pour tout réel c de $[a,b]$, $p(c) = \int_c^c f(x)dx = 0$.
Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $\overline{[c,d]} = 1 - p([c,d])$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi uniforme si $p(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Définition

Soit X une v.a qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle fonction de répartition de X, l'application $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ définie par : $\begin{cases} 0, & \text{si} x<a \\ p(a\le X\le x)=\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si} \quad x\in[a,b] \\ 1, & \text{si} \quad x>b \end{cases}$



Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.
On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}dt$.
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[)=e^{-\lambda c}$

Conséquences :

1. Pour tout réel $c>0, p(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0$.
2. $c>0, p([0,c])=\int_0^c f(x)dx=1-e^{-\lambda c}$
3. $p([c,+\infty[)=1-p([0,c])=e^{-\lambda c}$.

Définition

On dit qu'une v.a X suit loi exponentielle de paramètre λ, Si :

$$p(c\le X\le d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$$

$$\text{et} \quad p(X\ge c)=e^{-\lambda c}$$

Définition

Soit X une v.a qui suit la loi exponentielle p de la paramètre λ. On appelle fonction répartition de X, l'application $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$ définie par : $\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0 \\ p(0\le X\le x)=1-e^{-\lambda x}, & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$