



Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Nombres complexes

Rappel

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Produits remarquables

a et b deux nombres complexes

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$$

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

$$(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i \text{ et } (1+i)(1-i) = 2$$

Retenons

1. Soit z un nombre complexe

$$M(z) \Leftrightarrow M(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

$$2. \vec{z_{AB}} = z_B - z_A$$

$$3. I = A^*B \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Retenons

1. a et b deux réels ,
 $\overline{a+ib} = a-ib$ et $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2. Soit z un nombre complexe.

$$\bullet z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$\bullet z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$\bullet z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$\bullet z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

$$3. z = a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Equation : $az^2 + bz + c = 0, a \in \mathbb{C}^*$

Racine carrée

• Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées

• Soit Δ un nombre complexe non nul.

1. $z = x+iy$ où x et y des réels est une racine carrée de

$$\Delta \text{ si et seulement si } \begin{cases} x^2 - y^2 = 2\operatorname{Re}(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) \end{cases}$$

2. Les racines carrées de Δ sont $\pm \sqrt{|\Delta|} e^{i(\frac{\arg(\Delta)}{2})}$.

Théorème et Définition

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions définies par: $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$

ATTENTION

Si $\Delta \notin \mathbb{R}_+$ éviter d'écrire $\delta = \sqrt{\Delta}$

Conséquences

✓ Soit Δ un nombre complexe non nul et δ une racine carrée de Δ .

✓ Si $\Delta = -2$ Alors $\delta = \pm i\sqrt{2}$.

✓ Si $\Delta = b, b \in \mathbb{R}^-$ Alors $\delta = \pm i\sqrt{|b|}$

✓ Si $\Delta = 2i$ Alors $\delta = \pm(1+i)$.

✓ Si $\Delta = -2i$ Alors $\delta = \pm(1-i)$

✓ Si $\Delta = 5i = \frac{5}{2}(2i)$ Alors $\delta = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1+i)$

✓ Si $\Delta = -5i = \frac{5}{2}(-2i)$ Alors $\delta = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(1-i)$

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

$$\text{Alors } az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$



NETSCHOOL1
ACADEMY

Théorème

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ et $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Si z_0 est un zéro de $P(z)$ alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$ où $g(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$.

Nombres complexes et transformations

Symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$

L'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\bar{z}$ est la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$.

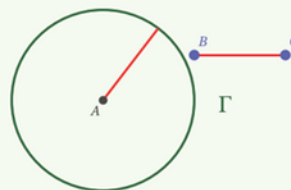
Symétrie centrale de centre O

L'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre O .

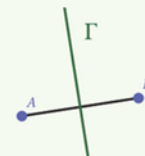
LIEUX GÉOMÉTRIQUES

A, B et C désignent trois points du plan P deux à deux distincts.

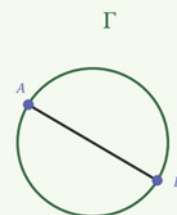
L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = BC\}$ est le cercle de centre A et de rayon BC .



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = MB\}$ est la médiatrice de $[AB]$.



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0\}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



L'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid \vec{MA} \cdot \vec{BC} = 0\}$ est la perpendiculaire à (BC) passant par A .

