



# Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions réciproques



### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , si pour tout  $y$  de  $f(I)$ , il existe une unique réel  $x$  de  $I$  tel que  $f(x) = y$  alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .

### Théorème

Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .

- On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$
- $f^{-1}$  est définie sur  $f(I)$
- $\forall y \in I$  et tout  $x$  de  $f(I)$  :  
 $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

### Courbe d'une bijection réciproque

Les courbes, dans un repère orthonormé, d'une bijection  $f$  et de sa réciproque  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

### Théorème

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ . La bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue et a le même sens de variation que  $f$  sur  $J = f(I)$ .

### Théorème

Soit  $f$  est une fonction strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

\* Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  et  $f'(a) \neq 0$  Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$  et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .

\* Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x$  de  $I$ ;  $f'(x) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f(I)$  et pour tout  $x$  de  $f(I)$  on a :  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

### Points méthode

Soit  $f$  une bijection d'un intervalle  $I$  sur  $J = f(I)$ .

\* Si on te demande d'étudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  en  $b$  La première chose à faire c'est : chercher  $a = f^{-1}(b)$  puis étudier la dérivabilité de  $f$  en  $a$ .

\* Si on te demande d'étudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  sur un intervalle  $K$  La première chose à faire c'est : déterminer  $L = f^{-1}(K)$  puis étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $L$ .

### Propriétés

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.  $x$  et  $y$  sont des réels positifs.

- $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ .
- $(\sqrt[n]{x})^n = x$ ,  $\sqrt[n]{x^n} = |x| = x$ .
- La fonction  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ .

### Propriétés

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.  $x$  et  $y$  sont des réels positifs.

- $\sqrt[n]{xy} = (\sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{y})$ .
- $y > 0$ ,  $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ .
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ .
- $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ ,  $\sqrt[mn]{x^m} = \sqrt[n]{x}$ ,  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$   $x > 0$

### Théorème

- La fonction  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x > 0$ ,  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ .
- Si  $f$  est dérivable et strictement positive sur  $I$  alors  $\sqrt[n]{f}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\sqrt[n]{f})' = \frac{1}{n} \frac{f' \sqrt[n]{f}}{f}$ .