Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions logarithmes

Définition

On appelle fonction logarithme népérien notée ln , la fonction primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction : $t \to \frac{1}{t}$

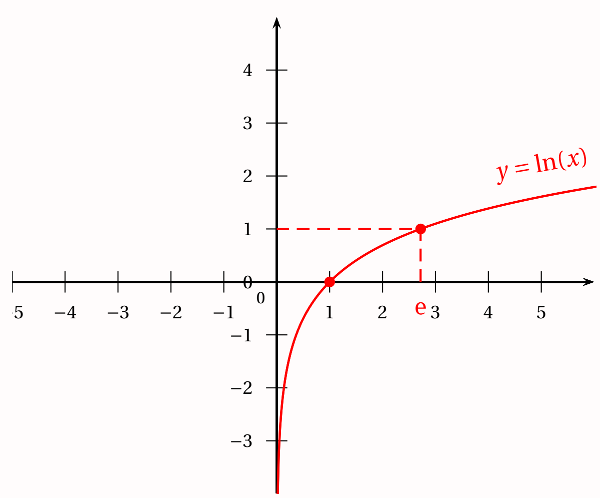
Limites remarquables

- ♠ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.
- ♠ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
- ♠ $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = [\ln'(1)] = 1$.
- ♠ Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x^m} = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

Propriétés algébriques

1. Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
   - $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
   - $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
   - $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a$
2. Soit a un réel strictement positif.
   - Pour tout entier n, $\quad \ln\left(a^n\right) = n\ln a$
   - Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln a$
3. Pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on a : $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$.

Courbe representative



Conséquences

- ♣ La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, $\quad \ln 1 = 0$ et $\ln' x = \frac{1}{x}$.
- ♣ Pour tout réel $x > 0$, $\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.
- ♣ La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- ♣ Soit a et b deux réels strictement positifs.
  - $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  - $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$
  - $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
  - $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$
  - $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$
- ♣ La fonction ln est une application bijective de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- ♣ Il existe un unique réel strictement positif noté e tel que $\ln(e) = 1$.
- ♣
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \ln\left(e^n\right) = n$.
  - $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad \ln\left(\sqrt[n]{e^p}\right) = \frac{p}{n}$.
  - $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) > 0$, pour tout x dans I. Alors la fonction $F : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout x dans I. Alors la fonction $F : x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout x dans I. Alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $F : x \mapsto \ln|u(x)| + k$ où $k = cte$.

Théorème

La fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$.