Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Fonctions Exponentielles

Fonction exponentielle base : e

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme Népérien notée :
$e : x \longmapsto exp(x) = e^x$

Conséquences

◇ Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$,
$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$.

◇ Pour tout réel x, $e^x > 0$.

◇ Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.

◇ Pour tout réel strictement positif x, $e^{\ln x} = x$.

◇ La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

◇ Soit a et b deux réels

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
- $e^a > 1 \Leftrightarrow a > 0$.
- $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$.

Théorème

La fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $F : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I
et $F'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + cte$.

NETSCHOOL1
ACADEMY

Propriétés algébriques

1. Pour tous réels a et b on a :
$e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

2. Soit a un réel .

♡ Pour tout entier n, $\left(e^a\right)^n = e^{na}$.

♡ Pour tout entier $n \geq 2$, $\sqrt[n]{e^a} = e^{\frac{a}{n}}$.

♡ $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$, $\sqrt[3]{e^a} = e^{\frac{a}{3}}$

3. Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on a :
$\prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k}$.

Limites remarquables

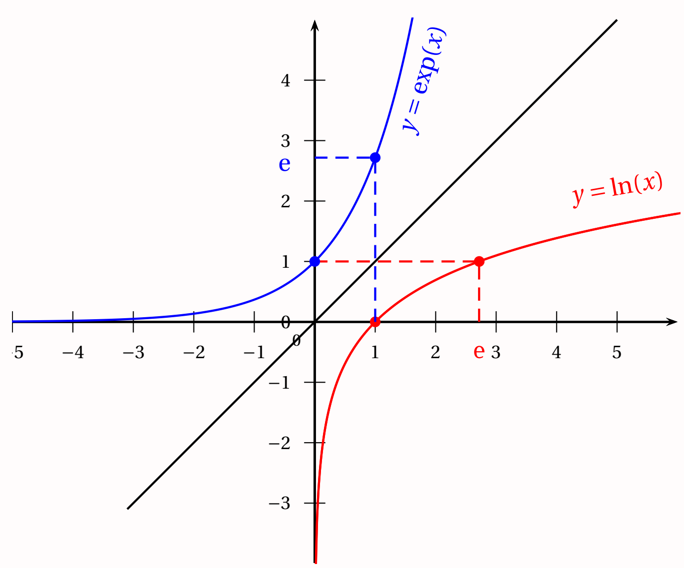
♠ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = 0$.

♠ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

♠ $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

♠ Pour tous entiers naturels non nuls n et m,
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Courbe representative



Fonction exponentielle base : a

Définition

Soit un réel $a > 0$, Pour tout réel x , on pose $a^x = e^{x \ln a}$

Définition

Soit un réel $a > 0$, On appelle fonction exponentielle base a la fonction $x \mapsto a^x$

Théorème

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x , $\left(a^x\right) = (\ln a)a^x$

Propriétés

Pour tous réels strictement positifs a et b et pour tous réels c et d on a:

♡ $a^{c+d} = a^c \times a^d$.

♡ $\left(a^c\right)^d = a^{c^d}$.

♡ $a^{c-d} = \dfrac{a^c}{a^d}$.

♡ $a^c \times b^c = (ab)^c$.

♡ $\dfrac{a^c}{b^c} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^c$.

Limites

Soit un réel $a > 0$

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = -\infty$

Fonctions puissances

Définition

Soit r un nombre rationnel n' appartenant pas à $\mathbb{Z}$.
On appelle fonction puissance r la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^r = e^{r \ln x}$.

Dérivée

Soit r un nombre rationnel. La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\left(x^r\right)' = r x^{r-1}$.

Limites

Soit r un nombre rationnel.

♣ Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$.

♣ Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$.

Primitive

Soit r un nombre rationnel different de 1. Les primitives sur $]0, +\infty$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont :
$F(x) = \dfrac{1}{r+1} x^{r+1}$

Croissances comparées

Théorème

Soit r un nombre rationnel strictement positif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$$