NETSCHOOL1
ACADEMY

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Dérivabilité

NETSCHOOL1
ACADEMY

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Retenons

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f\times g$	$f'g+fg'$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\dfrac{1}{g}$	$\dfrac{-g'}{g^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\sqrt[n]{f}$	$\dfrac{1}{n}\dfrac{f'\cdot\sqrt[n]{f}}{f}=\dfrac{1}{n}\dfrac{f'}{\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
$g(x)=f(ax+b)$	$g'(x)=a.f'(ax+b)$

Retenons

Fonction	Fonction dérivée
λf	$\lambda f'$
$g\circ f$	$f'\times g'\circ f$
$f(\sin x)$	$(\cos x).f'(\sin x)$
$f(\cos x)$	$(-\sin x).f'(\cos x)$
$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$-\dfrac{1}{x^2}.f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{u(x)}$	$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$
$g(x)=\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt$	$g'(x)=u'(x)f(u(x))$

Dérivée de la fonction composée

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(a)$.

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$
- Si $\begin{cases} f & \text{est dérivable sur } I \\ g & \text{est dérivable sur } J \\ \forall x\in I & f(x)\in J \end{cases}$
  Alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $\forall x\in I \quad (g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

Théorème

Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a\in I$. Alors f est continue en a.

Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur intervalle I . La fonction f' est la dérivée première de f.
Si f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée notée f'' ou $f^{(2)}$ est la dérivée seconde de f.
Si $f^{(n-1)}$, $(n\geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est la fonction dérivée n-ième de f, ou dérivée d'ordre n de f on la note $f^{(n)}$.

Dérivée et extremum local

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I :

- On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour tout $x\in J$ on a : $f(x)\leq f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : pour tout $x\in J$ on a : $f(x)\geq f(a)$.
- On dit que f admet un extremum local en a. Si f admet un maximum ou un minimum local en a.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a :

1. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a)=0$
2. Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Accroissements finis

Théorème de Rôlle

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, $a<b$. Si

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

Alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Interprétation graphique

Si les conditions du théorème de Rôlle sont justifiées pour une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ alors la courbe de f admet au moins une tangente horizontale.

Théorème (Égalité des accroissements finis)

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, $a<b$. Si

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe au moins un réel $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation graphique

Si les conditions du (T.A.F) sont justifiées pour une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ alors la courbe de f admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB) tel que $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, $a<b$. Si

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- il existe deux réels m et M tels que $\forall x\in]a,b[,\quad m\leq f'(x)\leq M$

Alors : $\quad m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.

corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si

- f est dérivable sur I
- il existe un réel $k>0$ tel que $\forall x\in I,\quad \left|f'(x)\right|\leq k$
- a et b sont deux réels de I

Alors : $\quad |f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$.

Accroissements finis et suites récurrentes

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction dérivable sur un intervalle I. Si

- il existe un réel $k>0$ tel que $\forall x\in I,\quad \left|f'(x)\right|\leq k$
- il existe un réel α de I tel que $f(\alpha)=\alpha$
- $\forall n,\quad u_n\in I$

Alors : $\quad \forall n,\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq k|u_n-\alpha|$

Théorème (Signe de la dérivée et sens de variation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est nulle, alors la fonction est constante sur I.
- Si la fonction dérivée est strictement positive (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction dérivée est strictement négative (sauf en quelques points isolés de I où elle s'annule), alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Alors : $\quad m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

- Si $\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)=0$ alors la fonction f est constante sur $[a,b]$.
- Si $\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)\geq 0$ alors la fonction f est croissante sur $[a,b]$.
- Si $\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $[a,b]$.
- Si $\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)\leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur $[a,b]$.
- Si $\forall x\in]a,b[,\quad f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

NETSCHOOL1
ACADEMY