REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◊◊◊◊ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : 2 H
	Coefficient : 2
Section : Economie et Gestion	**Session principale**

Exercice 1 (4 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n} & ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a- Calculer U_1 et U_2.

   b- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

2) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-2U_n^{\,2}}{1+2U_n}$.

   b- En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

   c- Prouver alors, que la suite (U_n) est convergente.

3) a- Calculer le réel ℓ tel que, $\ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell}$.

   b- En déduire la limite de la suite (U_n).

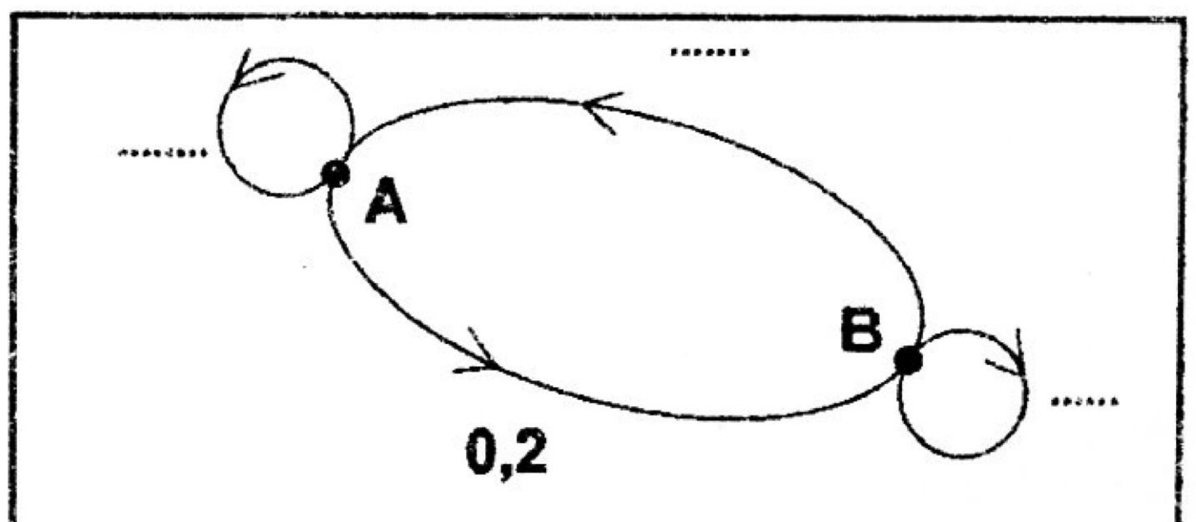
Exercice 2 (4 points)

Une compagnie d'assurance propose deux formules A et B d'assurance autos.

Une personne désirant s'affiler à cette compagnie choisit **une seule** de ces deux formules.

- Au bout d'une année, chaque affilé peut garder la même formule ou changer de formule l'année suivante.
- La probabilité qu'un affilé à la formule A change de formule, vers la formule B, l'année suivante est égale 0,2.

Le graphe G ci-contre est le graphe probabiliste décrivant l'évolution du choix de l'affilé d'une année à l'autre.



Le graphe G

Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ la matrice de transition associée au graphe G.

1) Recopier et compléter le graphe G.
2) Donner :

   a) La probabilité qu'un affilé à la formule B garde la même formule B l'année suivante.

   b) La probabilité qu'un affilé à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante.
3) Soit $P_0 = (0{,}3 \quad 0{,}7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial. Donner la matrice ligne P_1 décrivant l'état probabiliste après une année.
4) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3 (6 points)

On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -8\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -7 & 10\end{pmatrix}$

1) a- Calculer le déterminant de M, en déduire que M est inversible.

b- Calculer la matrice $M\times N$, en déduire la matrice inverse M^{-1} de M.

c- Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $\begin{cases} x+4y+2z=110 \\ 3x+2y+3z=120 \\ 2x+y+2z=75 \end{cases}$

2) Un atelier fabrique trois sortes de pièces mécaniques A, B et C.

- Les bénéfices unitaires sont : 60 Dinars pour A, 50 Dinars pour B et 40 Dinars pour C.
- L'atelier utilise trois machines X, Y et Z pour fabriquer les pièces A, B et C.
- Le temps unitaire (exprimé en heures) de passage de chaque pièce sur ces machines est donné par le tableau suivant :

Pièce / Machine	A	B	C
X	1	4	2
Y	3	2	3
Z	2	1	2

- Les capacités hebdomadaires, exprimées en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement : 110, 120 et 75 (ce qui correspond au cas où les machines X, Y et Z travaillent à plein temps).
- On note respectivement a, b et c les nombres hebdomadaires (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.

a- Montrer que le triplet (a , b , c) vérifie le système (S) donné en 1) c).

b- Déterminer alors a, b et c.

c- Déterminer le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^{x}}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a-Calculer $f(0)$.

   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a- Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$.

   b- Dresser le tableau de variation de f.

   c- Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   d- Tracer, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la tangente (T) et la courbe (C).

3) a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b- Tracer, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (Γ) représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.

4) a- Montrer que $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\ln\frac{3}{2}$.

   b- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}-2$.

   c- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.