MATHS

Section : Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ Session

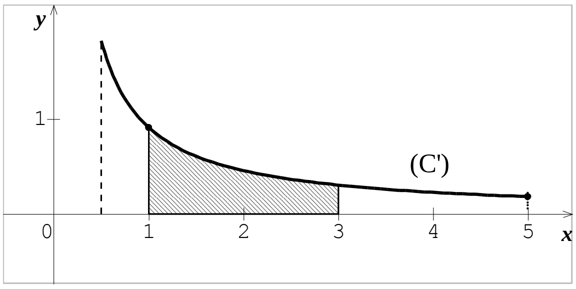
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$.



Contenu

- *Tangente à une courbe*
- *Notion d'aires*
- *Inégalités des accroissements finis*

Solutions

1. Faux., car Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$, $f'\ x > 0$. Par suite $f'\ x \neq -1$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$.

2. Vrai. En effet : La fonction f' est continue et positive sur $1,3$ donc l'aire de la partie hachurée est égale à :

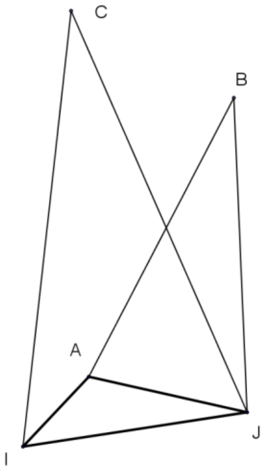
$$\int_1^3 f'\ x\ dx = f\ 3\ - f\ 1\ = 1 - 0 = 1.$$

3. Vrai. En effet : La fonction f' est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ et $\frac{1}{2} \in f'\left(\left[\frac{1}{2}, 5\right]\right)$ donc il existe $c \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ tel que $f'\ c\ = \frac{1}{2}$.

4. Vrai. En effet : La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ et pour $x \in [1,3]$, $|f'\ x\ | \leq 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous a et b de $[1,3]$, $|f\ b\ - f\ a\ | \leq |b-a|$.

Exercice 2



Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer r_C (I).
   b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
   c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.
2) Soit K = t (C).

   Montrer que BC = BK et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
   a) Soit O le milieu de [AC].
      Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.
   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Contenu

- *Composée rotation et translation*
- *Configuration de base (triangle isocèle, parallélogramme)*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître la composée d'une rotation et d'une translation*
- *Exploiter une isométrie pour déterminer la nature d'un quadrilatère.*

Solutions

1. a) Le triangle CIJ est isocèle en C et $\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6}\ \ 2\pi$, par suite $CI = CJ$ et $\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6}\ \ 2\pi$.

On en déduit que $r_C\ \ I\ = J$.

b) Le triangle BAJ est isocèle en B et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, par suite $BA = BJ$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On en déduit que $r_B\ \ A\ = J$. $\begin{cases} t\ \ I\ = A \\ r_B\ \ A\ = J \end{cases}$ donc $r_B \circ t\ \ I\ = J$.

c) $r_B \circ t$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'une translation donc c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

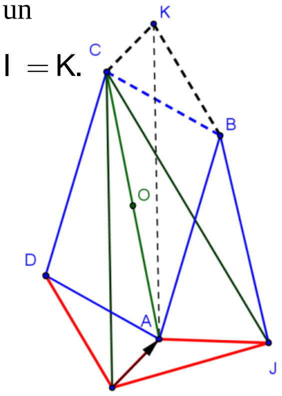
Or $r_B \circ t(I) = J$, $CI = CJ$ et $(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$. Il en résulte que C est le centre de $r_B \circ t$.

On en déduit que $r_B \circ t = r_C$.

2. Puisque $K = t(C)$ donc $r_B \circ t(C) = r_B(K)$, or $r_B \circ t(C) = r_C(C) = C$. Il en résulte que $r_B(K) = C$ ou encore

$BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

3. **a)** On sait que $K = t(C)$ donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IA}$ et les points I, A et C ne sont pas alignés donc IAKC est un parallélogramme. Comme O est le milieu de $[IC]$ donc O est le milieu de $[IK]$. Il en résulte que $S_O(I) = K$. d'autre part Le point O est le milieu de $[AC]$ donc $S_O(A) = C$.



Le triangle DIA est isocèle de base $[IA]$ tel que $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

$S_O(I) = K$, $S_O(A) = C$, $\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et le triangle BKC est isocèle de base $[KC]$.

On en déduit que l'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC.

b) L'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC, $S_O(I) = K$ et $S_O(A) = C$ donc $S_O(D) = B$ ou encore O est le milieu de $[BD]$ de plus O est le milieu de $[AC]$ et les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A le point de coordonnées (3 , 2).
Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points E(3 ,0) et F(0,2).
Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

c) En déduire que S(N) = P.

d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M' = S(M).

Montrer que $z' = -\frac{3}{2} i z + \frac{13}{2} i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.
Montrer que $3x + 2y = 13$.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Contenu

- *Similitude directe (image d'une configuration de base par une similitude directe, expression complexe d'une similitude directe)*
- *Arithmétique*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une similitude directe.*
- *Reconnaître l'image d'une droite par une similitude directe.*
- *Identifier l'image d'un point par une similitude directe.*
- *Résoudre un problème d'arithmétique.*

Solutions

1. a) $A \neq E$ et $A \neq F$ donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui envoie E en F, son rapport est $k = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{2}$ et son angle a pour mesure $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b) $S(E) = F$ et $E \in (O,\vec{u})$ donc $S((O,\vec{u}))$ est la droite passant par F et perpendiculaire à $(O,\vec{u})$.

Il en résulte que $S((O,\vec{u})) = (O,\vec{v})$.

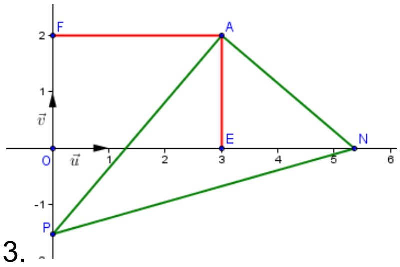
c) $S((AN))$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (AN), il en résulte que $S((AN)) = (AP)$.

$N \in (AN) \cap (O,\vec{u})$ donc $S(N) \in S((AN)) \cap S((O,\vec{u})) = (AP) \cap (O,\vec{v}) = \{P\}$. D'où $S(N) = P$.

d) S est la similitude directe de centre A d'affixe $z_A = 3+2i$, de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S. L'expression complexe de S est de la forme $z' = az + b,\ a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $a = \frac{3}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{3}{2}i$ et $\frac{b}{1+\frac{3}{2}i} = 3+2i$ donc $b = \frac{13}{2}i$.

On en déduit que $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$.



2. **a)** L'affixe de N est $z_N = x$ et l'affixe de P est $z_P = iy$.

$S(N) = P \Leftrightarrow iy = \frac{-3}{2}ix + \frac{13}{2}i = \left(\frac{-3}{2}x + \frac{13}{2}\right)i \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{13}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y = 13.$

b) $N(x,0)$ et $P(0,y)$. x et y sont des entiers si et seulement si (x,y) est solution de l'équation $3x+2y=13$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Résolvons alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3x+2y=13.$

$(1,5)$ est solution de (E) donc $3x+2y=13 \Leftrightarrow 3x+2y = 3\times1+2\times5 \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(-y+5)\quad (*)$.

3 divise $2(-y+5)$ et $3 \wedge 2 = 1$ donc d'après Gauss 3 divise $(-y+5)$ par suite $-y+5 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $y = -3k+5$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement $3(2k+1) + 2(-3k+5) = 3+10 = 13$.

On en déduit que $N(2k+1, 0)$, $P(0, -3k+5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0{,}286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Contenu

- *Loi de probabilité continue (loi exponentielle)*
- *Loi binomiale*

Aptitudes visées :

- *Calculer la probabilité d'un évènement pour une loi exponentielle.*
- *Reconnaître une loi binomiale*
- *Calculer la probabilité d'un évènement pour une loi binomiale.*

Solutions

1. **a)** $p(X > 10) = e^{-0{,}125 \times 10} = e^{-1{,}25} = 0{,}286.$

b) L'évènement « l'oscilloscope a une durée de vie inférieur à 6 mois » se traduit par $(0 \leq X \leq 0{,}5)$.

$p(0 \leq X \leq 0{,}5) = 1 - e^{-\frac{0{,}125}{2}} = 1 - e^{-0{,}0625} = 0{,}06.$

2. On considère la variable aléatoire Y qui prend pour valeurs, le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $(n, p(X > 10) = 0.286)$.

La loi de Y est donnée par $p(Y = k) = C_n^k (0{,}286)^k (0.714)^{n-k}, k \in \{0,1,....,n\}$.

a) $p_1 = p(\overline{Y = 0}) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0{,}714)^n$.

b) $p_1 \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1- \; 0{,}714^{\;n} \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \; 0{,}714^{\;n} \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n\ln \; 0{,}714 \; \leq \ln \; 0{,}001$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln \; 0{,}001}{\ln \; 0{,}714} = 20.505$. Soit $n = 21$.

Exercice 5

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) On a tracé ci-dessous , dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation y = x².

a) Soit x > 0. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel x > 0, on considère les points $M_k\,(x,x^k)$ et M (x,ln x).

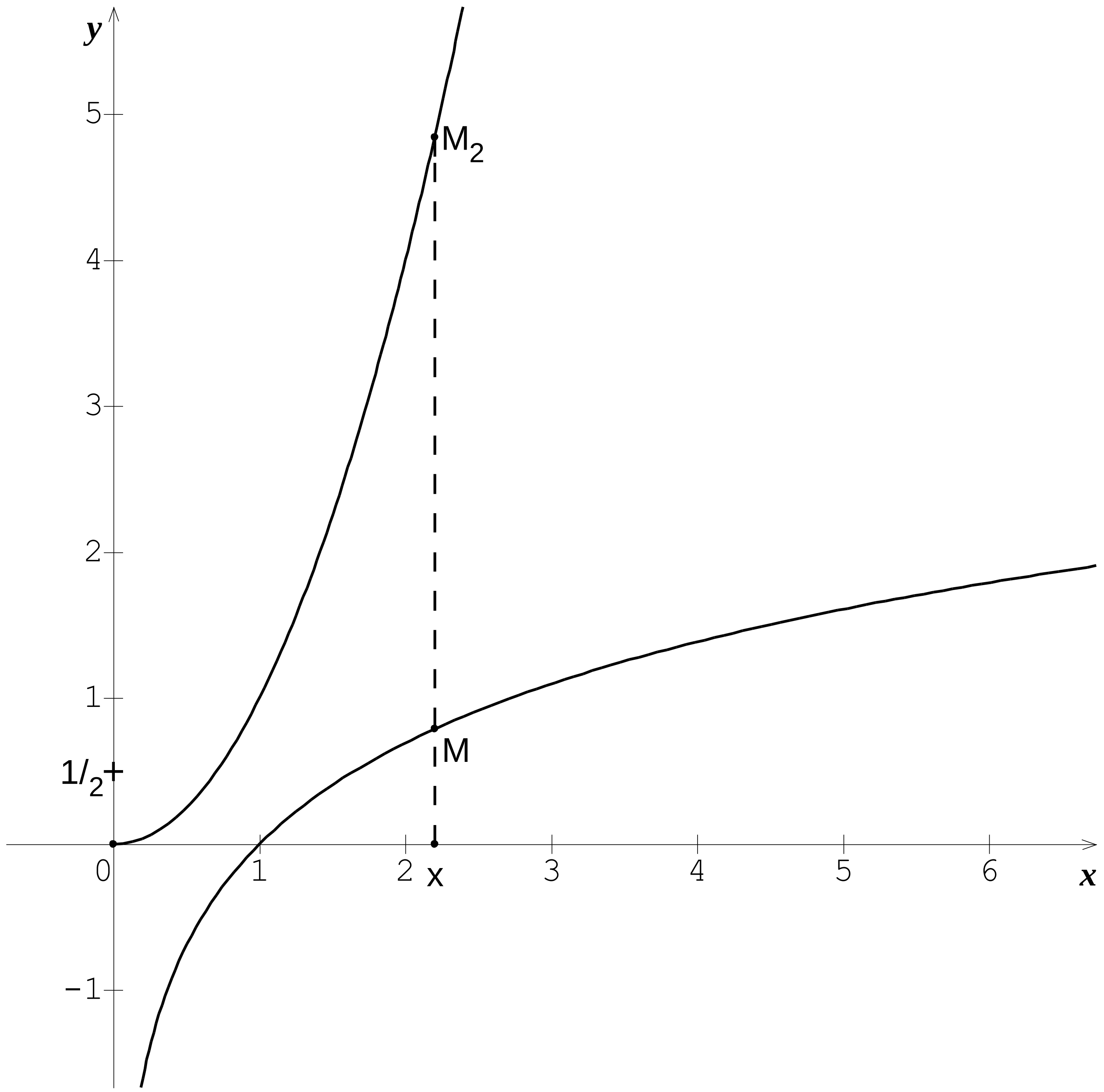
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier k ≥ 2, on pose $u_k = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\dfrac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers +∞.



- *Fonction ln : continuité, dérivabilité, branches infinies .*
- *Notion d'extremum*
- *Suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Calculer la limite d'une fonction.*
- *Interpréter graphiquement un résultat.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un minimum d'une fonction.*
- *Calculer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

I.

1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

c) La fonction f_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_2'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.

Le signe de $f_2'(x)$ est celui de $2x^2-1$. $\begin{cases} 2x^2-1 \\ x \in]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

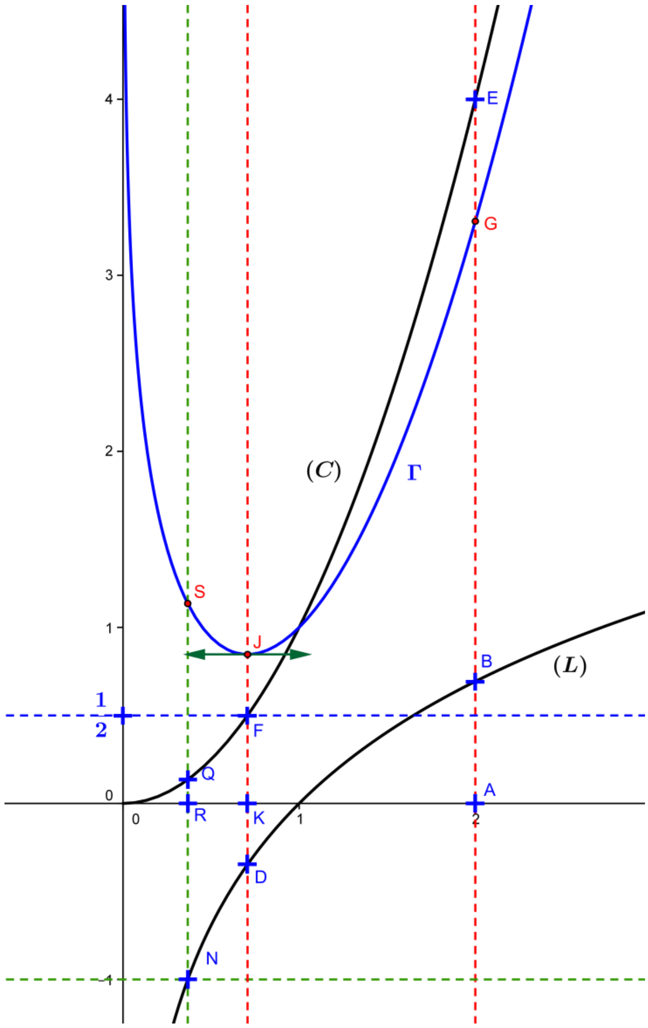
x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a)** Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $MM_2 = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)| = f_2(x)$ car f_2 admet un minimum global strictement positif sur $]0,+\infty[$ donc $f_2(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) *) La droite passant par le point A de l'axe des abscisses d'abscisse 2 et parallèle à l'axe des ordonnées coupe L en B et C en E. Ainsi le point de Γ d'abscisse 2 est le point G de $[AE$ tel que $EG = AB$.

**) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée -1, on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe L en N. Du point N on mène la parallèle à l'axes des ordonnées. Elle coupe C en Q et l'axes des abscisses en R, le point de Γ d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ est alors le point S du segment RQ tel que $RS = NQ$.

***) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe C en F et de F on mène la parallèle à l'axe des ordonnées elle coupe L en H et l'axe des abscisses en K, le point de Γ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est alors le point J de la demi-droite KF tel que $KJ = HF$.



II.

1. **a)** La fonction f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$, $f_k'(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$.

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ de plus $f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ et $f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$. il en résulte que f_k' s’annule en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ en changeant de signe, d’où f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à

$$f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k - \ln\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\ln k = \frac{1+\ln k}{k}.$$

c) $MM_k = |x^k - \ln x| = |f_k(x)| = f_k(x)$ car le minimum de f_k est $\frac{1+\ln k}{k} > 0$ pour $k \geq 2$. Donc la valeur minimale de MM_k est la valeur minimale de f_k sur $]0,+\infty[$ qui est égale à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1+\ln k}{k}$..

2. **a)** Pour tout $k \geq 2$, $\ln u_k = \ln\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{k} = \frac{-\ln k}{k}$. $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{-\ln k}{k} = 0$ d’où $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$.

b) $AA_k = \sqrt{(1-u_k)^2 + (f_k(u_k))^2}$. Or $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(u_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1+\ln k}{k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} AA_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{(1-u_k)^2 + (f_k(u_k))^2} = 0$.