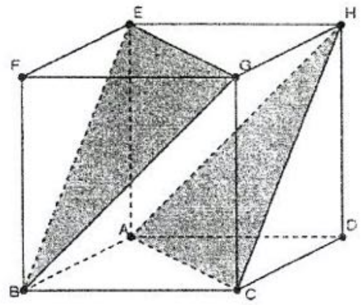
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◇◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : Mathématiques	**Session principale**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 **(4 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Soit ABCDEFGH le cube tel que

$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 6\vec{k}$.

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

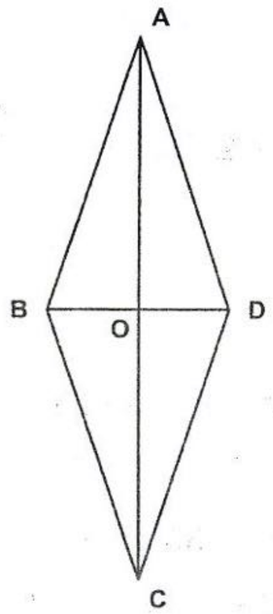
c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Exercice 2 **(5 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = 3 BD.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9OD'.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.

Montrer que MQ = 3 NP.

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1(\bmod 10)$.

a) Montrer que $a^9 + a^8 + .. + a + 1 \equiv 0(\bmod 10)$.

b) En déduire que $a^{10} \equiv 1(\bmod 10^2)$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4 \equiv 1(\bmod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(\bmod 10^2)$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b)Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}dx$.

Annexe (à rendre avec la copie)