REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
◈◈◈
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2013

Epreuve : **MATHEMATIQUES**

Durée : 4 H

Coefficient : 4

Section: **MATHEMATIQUES**

SESSION PRINCIPALE

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations (A_1), (A_2), (A_3) et (A_4) ci-dessous, répondre par " Vrai " ou " Faux " en justifiant la réponse.

1) (A_1) : Soit n un entier. " Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ ".

(A_2) : " L'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ".

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$.

(A_3) : " F est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ ".

(A_4) : " Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F, $F'(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$ ".

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2AB.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 3 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x-y+z=0$.

2) Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ.

a) Montrer que $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

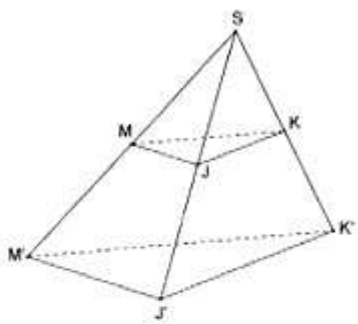
b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [S J) et [S K) respectivement en M', J' et K'.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$.



Exercice 4 : (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1+e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P=(1-i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{EM})}=\sin\theta-\cos\theta$ et calculer $\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 : (6 points)

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty,0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$ et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+\ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g.

Dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_φ, C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation y = x.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b.

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $(b=e^{-a})$.

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b=e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a\neq0$ et $a=\dfrac{e^a}{e^a-1}$).

b) En déduire que Δ_α est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux points $A(\alpha,f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$.($\alpha$ étant la valeur définie dans la question **I.** 2))

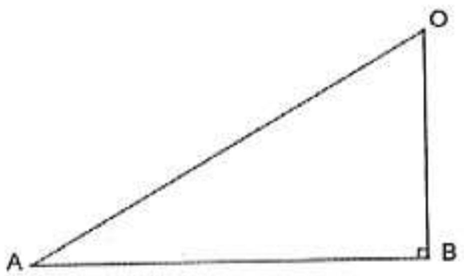
c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, le point $A(\alpha,f(\alpha))$.

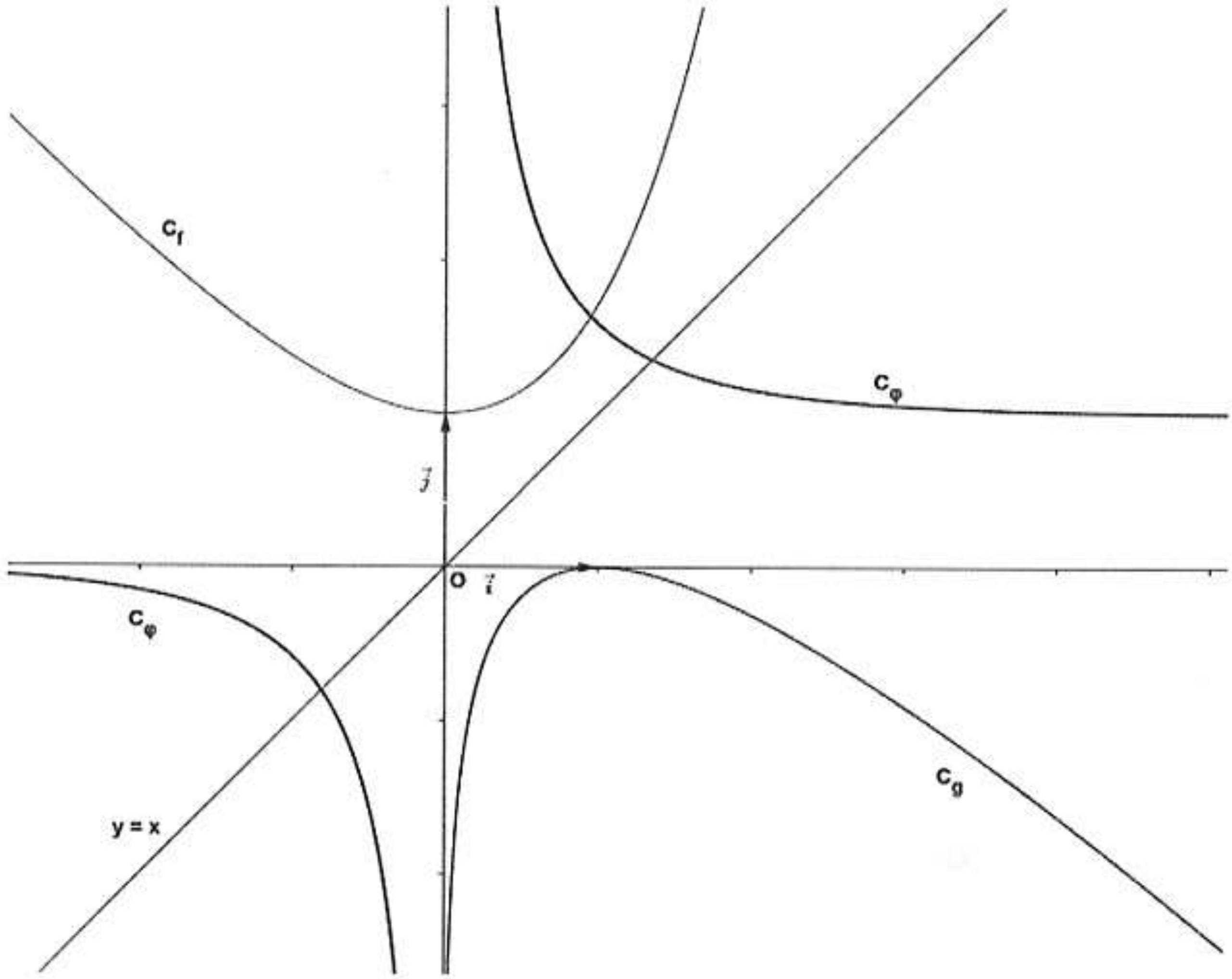
b) Vérifier que $e^{-\alpha}=f(-\alpha)-\alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_α.

ANNEXE



(Figure 1)



(Figure 2)