

EXAMEN DU BACCALAURÉAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 H

COEFFICIENT : 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

*Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

- 1) On lance, dix fois de suite, un dé cubique équilibré dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
La probabilité que la face numérotée "2" apparaisse au moins une fois est égale à

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ b) $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

- 2) Soit Ω un univers, p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et E et F deux événements tels que $p(F) = \frac{1}{3}$ et $p(E/F) = \frac{1}{4}$.

$p(\bar{E} \cap F)$ est égal à

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$

- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ est égale à

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

- 4) L'intégrale $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{x \ln x} dx$ est égale à

a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) $\frac{3}{8}$

Exercice 2 (5 points)

- 1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z + 2(1+i) = 0$.

a) Vérifier que $(1-3i)^2 = -8-6i$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2i$, $1-i$, $3-i$ et $3+i$.

- Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- Montrer que le triangle ABD est isocèle.
- Montrer que les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (AC).
- Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire l'aire du quadrilatère ABCD.

Exercice 3 (6 points)

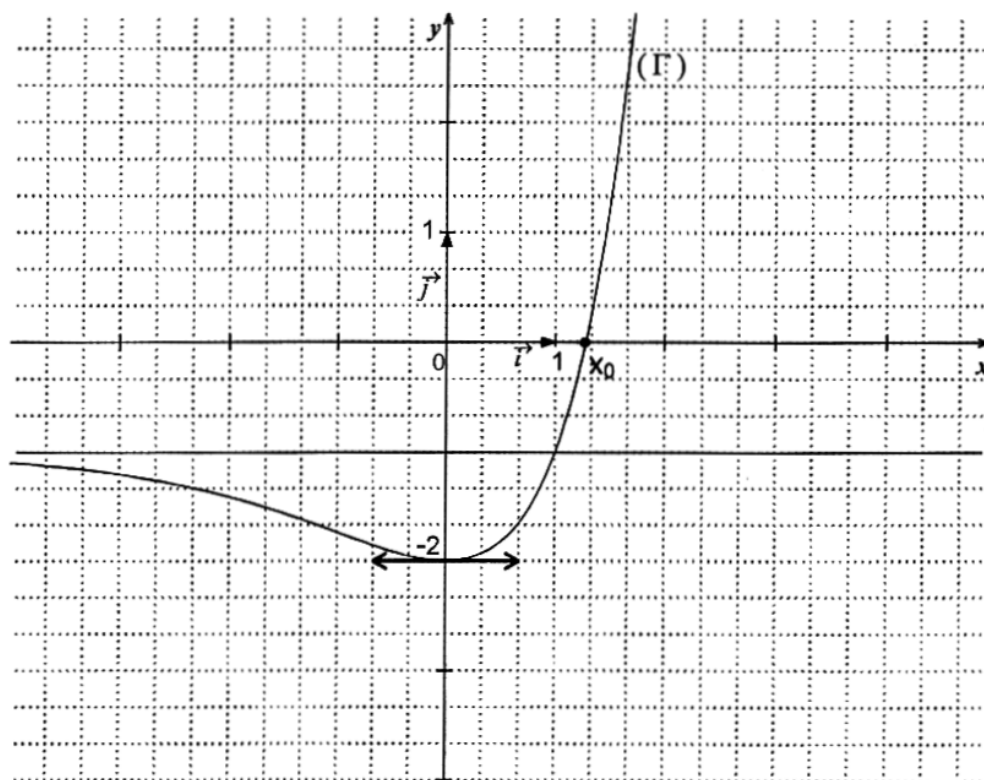
L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-1, 0, 0)$ et $I(1, 2, 1)$.

- Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - On désigne par P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x + y - z + 1 = 0$.
- Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$.
 - Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon.
 - Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A.
 - Calculer le volume du tétraèdre IABC.
- Soit H le milieu du segment [IA] et Q le plan passant par H et parallèle à P.
 - Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle ($\mathcal{C}$).
 - Déterminer le centre et le rayon du cercle ($\mathcal{C}$).

Exercice 4 (6 points)

- La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait :
 - La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.
 - La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.
 - La courbe (Γ) coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un unique point d'abscisse x_0 .



En utilisant le graphique :

- a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.
 - b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- 2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\alpha x + \beta) e^x - 1$ où α et β sont deux réels.
- a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β .
 - b) Dédire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x , $g(x) = (x - 1) e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Justifier que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- 4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0 - 1}$.
- d) Tracer $(\mathcal{C})$. (on prendra $x_0 = 1, 2$).