

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	c	a	a	b

$$1) \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = 2\vec{i} \wedge 4\vec{k} = 8\vec{i} \wedge \vec{k} = -8\vec{j}$$

2) La droite (BD) est parallèle à la droite (FH) du plan (FHC), d'où elle est parallèle à ce plan.

La droite (BD) est strictement parallèle au plan (FHC) car D n'appartient pas à ce plan

$$3) \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$$

$$= 3\vec{j} \wedge 2\vec{i} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = 6\vec{j} \wedge \vec{i} \cdot 3\vec{j} + 2\vec{i}$$

$$= -6\vec{k} \cdot 3\vec{j} + 2\vec{i} = -18\vec{k} \cdot \vec{j} - 12\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

4) On peut remarquer que le plan Q n'est autre que le plan (GHD) et que D est le projeté orthogonal de A sur ce plan, aussi que $AD = 3$. Ainsi l'intersection de la sphère S avec le plan Q est le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

Exercice 2

$$1) a) (E): z^2 - 1 + i(2 + \sqrt{3})z - 2(\sqrt{3} - i) = 0.$$

On prend $z = 2i$:

$$(2i)^2 - 1 + i(2 + \sqrt{3})2i - 2(\sqrt{3} - i) = -4 - 2i - 2(2 + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + 2i$$

$$= -4 - 2i + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i = 0.$$

D'où $2i$ est une solution de l'équation (E).

b) On a la somme des deux solutions est $1 + i(2 + \sqrt{3}) = 2i + 1 + i\sqrt{3}$. D'où l'autre solution est $1 + i\sqrt{3}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}; z_B = 2i \text{ et } z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3} + 2}{2}.$$

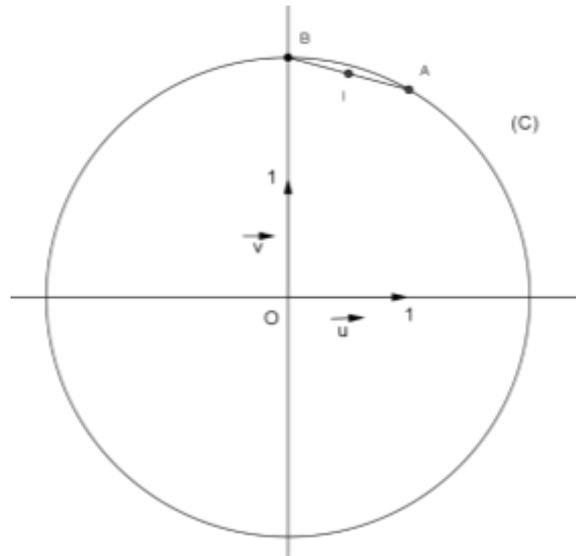
$$a) z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; z_B = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) $OA = |z_A| = 2$; $OB = |z_B| = 2$; d'où les points A et B sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2.

c) $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2} = z_I. \text{ D'où I est le milieu du segment [AB].}$$

d)



3)a) Le triangle AOB est isocèle en O puisque les points A et B sont sur le cercle (C), I est le milieu du côté [AB], d'où [OI) est la bissectrice de l'angle AOB .

b) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}, \vec{u} + \vec{u}, \overrightarrow{OB} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$= \overrightarrow{OA}, \vec{u} + \vec{u}, \overrightarrow{OB} + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; ; k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\vec{u}, \overrightarrow{OI} = \vec{u}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \text{ OI est la bissectrice de AOB donc } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

d) On a $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

$$|z_1| = \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+2}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

D'autre part $\arg(z_1) = \vec{u}, \overline{OI} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$

D'où $z_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

$$\begin{aligned} 4) z_1 &= \sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} + i \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $0, +\infty$ par $\begin{cases} f(x) = -x + 2x \ln x & \text{si } x \in 0, +\infty \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 2x \ln x = 0 = f(0).$

D'où f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 2x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 + 2 \ln x = -\infty.$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C) de f admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.

2)a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + 2 \ln x) = +\infty.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + 2 \ln x = +\infty.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3)a) $f(x) = -x + 2x \ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$f'(x) = -x + 2x \ln x \quad ' = -1 + 2 \ln x + 2x \frac{1}{x} = 1 + 2 \ln x, \text{ pour tout } x \in 0, +\infty.$$

b) $f'(x) = 1 + 2 \ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$	
$f'(x)$	0	-	0	+		
f	0	↘		$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	↗ $+\infty$	

$$c) f(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + 2\sqrt{e} \ln(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + 2\sqrt{e} \frac{1}{2} = -\sqrt{e} + \sqrt{e} = 0.$$

d) $f(x) = -x + 2x \ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$\begin{aligned} f(x) = x; \quad x \in 0, +\infty &\Leftrightarrow -x + 2x \ln x = x; \quad x > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 2x \ln x = 0; \quad x > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 + \ln x = 0; \quad x > 0 \\ &\Leftrightarrow -1 + \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

D'où le deuxième point d'intersection de la courbe (C) et la droite Δ d'équation $y = x$ est le point de coordonnées (e, e).

e) Voir graphique.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\sqrt{e}, +\infty[$ et (C_1) la courbe de g .

a) g est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, d'où elle réalise une bijection de

$[\sqrt{e}, +\infty[$ sur $g[\sqrt{e}, +\infty[= 0, +\infty$. Ainsi g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = 0, +\infty$.

b) Voir graphique.

5)a) On peut remarquer que $(E') \cup (E) \cup (E_1)$, où (E_1) est le symétrique de la partie (E) par rapport à Δ , forme la partie limitée par le carré de côté e . Si on exprime cette relation par les aires on obtient :

$$\text{aire(carré)} = \text{aire}(E') + \text{aire}(E) + \text{aire}(E_1)$$

$$\Leftrightarrow e^2 = A' + 2A$$

$$\Leftrightarrow A' = e^2 - 2A$$

b) $\int_{\sqrt{e}}^e (x \ln x) dx$; par une intégration par parties :

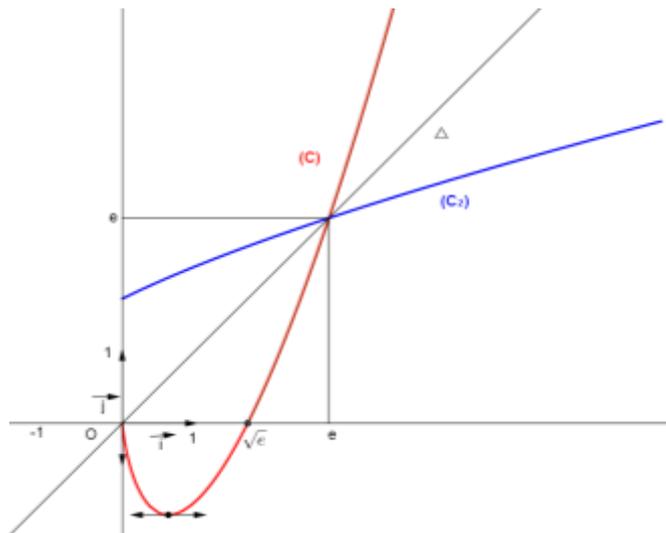
$$\text{On pose : } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{e}}^e (x \ln x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_{\sqrt{e}}^e - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{e}}^e x dx = \left(\frac{1}{2}e^2 \ln e \right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{e}^2 \ln \sqrt{e} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{\sqrt{e}}^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}(e^2 - e) = \frac{1}{4}e^2. \end{aligned}$$

c) On a $A = \int_{\sqrt{e}}^e (x \ln x) dx = \frac{1}{4}e^2$ et $A' = e^2 - 2A$, d'où $A' = e^2 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}e^2$ u.a

Le graphique :



Exercice 4

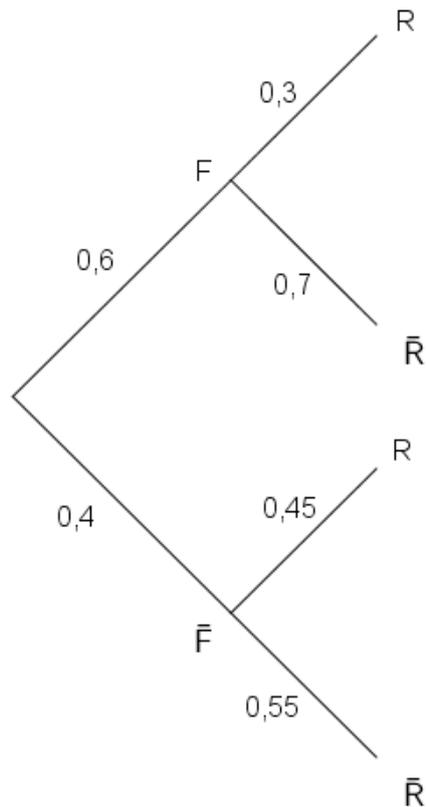
1) On a les événements suivants :

F « le relevé de notes choisi est celui d'une fille ».

R « le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat ».

- 60% des élèves admis sont des filles, donc $p(F) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0,6$.
- 30% parmi les filles admises sont rachetées, donc $p(R/F) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$.
- 45% parmi les garçons admis sont rachetés, donc $p(R/\bar{F}) = \frac{45}{100} = 0,45$.

2) L'arbre pondéré traduisant la situation :



3)a) Soit p la probabilité que le relevé de notes choisi soit d'un garçon admis sans rachat.

$$p(\bar{F} \cap \bar{R}) = p(\bar{F}) \cdot p(\bar{R} / \bar{F}) = 0,4 \times 0,55 = 0,22.$$

b) $p(R) = p(F) \cdot p(R / F) + p(\bar{F}) \cdot p(R / \bar{F}) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,45 = 0,18 + 0,18 = 0,36.$

c) Le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat, la probabilité que ce relevé de notes soit celui d'un garçon est

$$p(\bar{F} / R) = \frac{p(\bar{F} \cap R)}{p(R)} = \frac{p(\bar{F}) \cdot p(R / \bar{F})}{p(R)} = \frac{0,4 \times 0,45}{0,36} = \frac{0,18}{0,36} = \frac{1}{2}.$$

4) On se ramène à un tirage successif et avec remise de 20 relevés. La situation peut se ramener à une loi binomiale X de paramètre 20 et 0,36.

On a $p(X = k) = C_{20}^k (0,36)^k (0,64)^{20-k}$; $k \in 0, 1, 2, \dots, 20$.

a) p_1 la probabilité que deux exactement de ces élèves soient admis avec rachat.

$$p_1 = p(X = 2) = C_{20}^2 (0,36)^2 (0,64)^{18} = 190 \times (0,36)^2 (0,64)^{18}.$$

b) p_2 la probabilité qu'au moins un de ces élèves soient admis avec rachat.

$$p_2 = p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,64^{20}.$$