

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ◆◆◆ <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> SESSION DE JUIN 2014	Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b>
	Durée : 4 H
	Coefficient : 4
<b>Section : Mathématiques</b>	<b>Session de contrôle</b>

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

### Exercice 1 ( 5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe ( **Figure 1** ), IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] ,  $OA = 2OI$  et  $\widehat{(OI, OA)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  .

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  .

- 1) Déterminer h(O) et s(I).
- 2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

- a) Soit  $O' = f(O)$ . Montrer que  $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$  et construire le point O'.
- b) Soit  $I' = f(I)$ . Montrer que  $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$  et construire le point I'.
- 3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ , où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.
  - a) Exprimer en fonction de z l'affixe  $z_P$  du point P.
  - b) Exprimer en fonction de z l'affixe  $z_Q$  du point Q.
  - c) Soit  $z'$  l'affixe du point  $M' = f(M)$ . Montrer que  $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$ .
  - d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

## **Exercice 2 (5points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Soit  $(E)$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse  $(E)$  et donner son excentricité.

b) Soit  $(P)$  la parabole d'équation  $y^2 = 2x + 4$ .

Déterminer les coordonnées du foyer  $F$  de la parabole  $(P)$  et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  l'ellipse  $(E)$  et la parabole  $(P)$ .

Soit  $(\Gamma)$  la courbe d'équation  $y^2 = -2|x| + 4$ .

a) Vérifier que  $(O, \vec{j})$  est un axe de symétrie de  $(\Gamma)$ .

b) Tracer  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3) a) Soit  $C$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 4$ .

Vérifier que pour tout réel  $t$  de  $[0, 2]$ , le point  $M(t, \sqrt{4-t^2})$  appartient à  $C$ .

b) On pose  $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt$ . Montrer que  $I_1 = \pi$ .

4) Calculer  $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4} dt$ .

5) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la surface limitée par la courbe  $(\Gamma)$  et l'ellipse  $(E)$ .

Exprimer  $\mathcal{A}$  en fonction de  $I_1$  et  $I_2$  puis calculer  $\mathcal{A}$ .

## **Exercice 3 (4points)**

1) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E) : 1111x - 10^4y = 1$ .

a) Vérifier que  $(-9, -1)$  est une solution de  $(E)$ .

b) Résoudre l'équation  $(E)$ .

2) Soit  $n$  un entier.

a) Montrer que s'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $n=1111p$  et  $n=1+q10^4$

alors  $(p, q)$  est une solution de  $(E)$ .

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers  $n$  tels que 
$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases} .$$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par  $10^4$  est égal à 1.

#### **Exercice 4 (6points)**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

Déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par 
$$\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que  $g$  est continue à droite en 0.

b) Montrer que  $g$  est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

3) Dans l'annexe ci-jointe ( **Figure 3**), on a représenté dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe de la fonction  $f$  et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point  $A$  de coordonnées  $(e, e)$ .

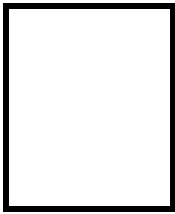
b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe  $C_g$  de  $g$  au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe  $C_g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

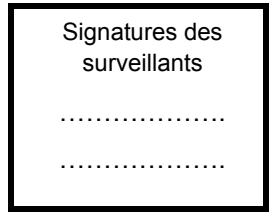
4) On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \sqrt[n]{n} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

a) Donner la limite de  $(u_n)$ .

b) Déterminer l'entier naturel  $n$  pour lequel  $\sqrt[n]{n}$  est maximal.



Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....



Signatures des  
surveillants

.....  
.....



Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

### Annexe ( à rendre avec la copie)

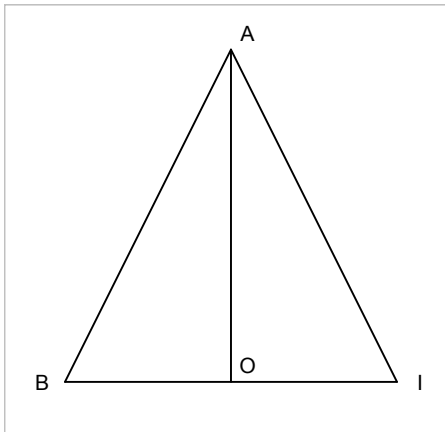


Figure 1

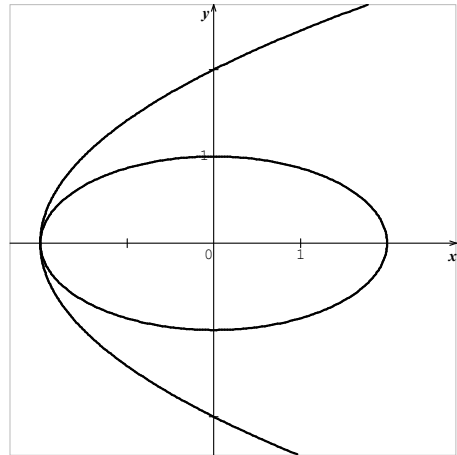


Figure 2

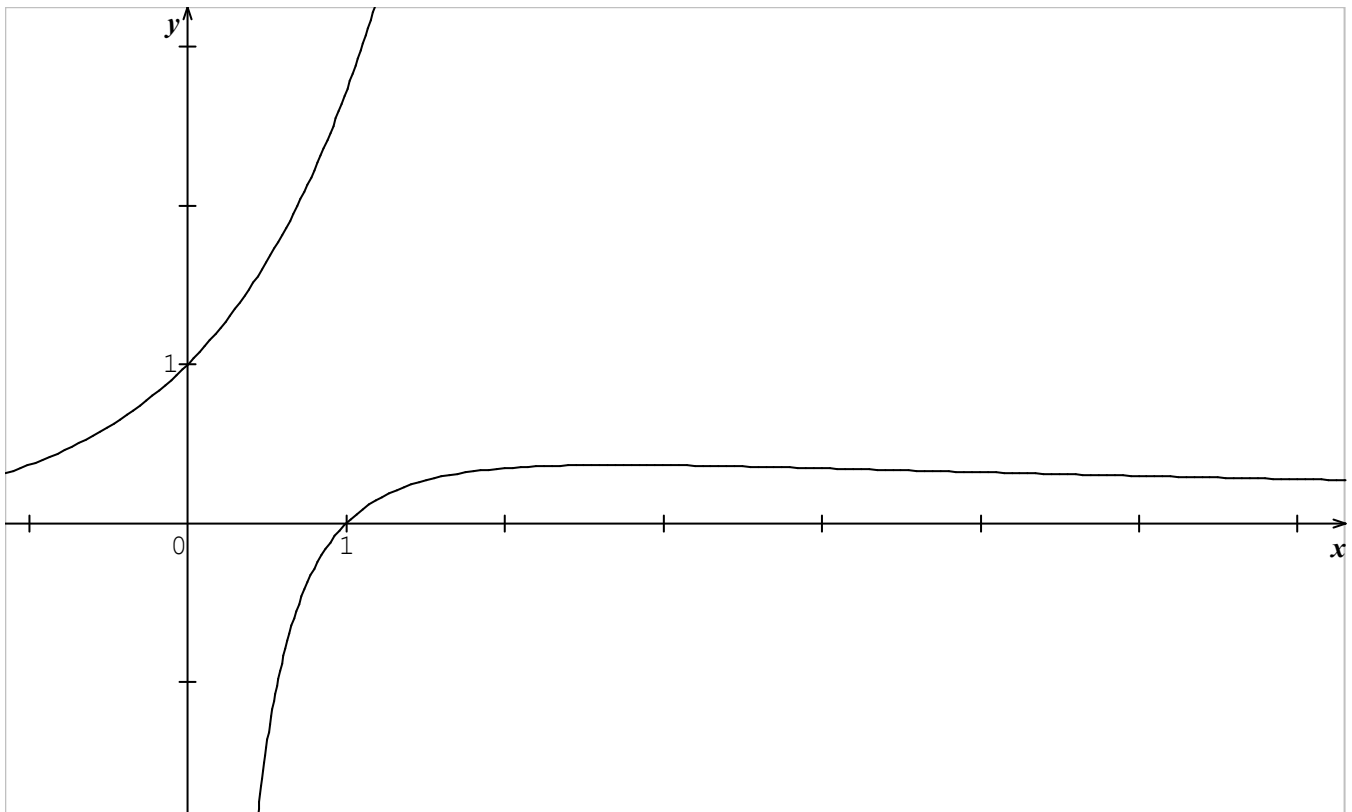


Figure 3