

Exercice 1

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O) = B$.

$$\begin{cases} \frac{OA}{OI} = 2 \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}, \text{ il en résulte que } S(I) = A.$$

2) a) On sait que $h(O) = B$ et $S(O) = O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés $(B, 3)$ et $(O, 1)$, on en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I) = I$ et $S(I) = A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés $(I, 3)$ et $(A, 1)$, on en déduit que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

3) a) $h(M) = P \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow z_p - 1 = 2(z - 1) \Leftrightarrow z_p = 2z - 1$.

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$$z_Q = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z = 2iz.$$

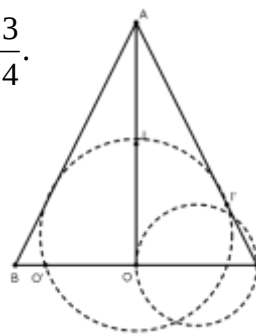
c) $f(M) = M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés $(P, 3)$ et $(Q, 1)$ on en déduit que

$$\overrightarrow{PM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow z' - z_p = \frac{1}{4}(z_Q - z_p) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}(2iz - 2z + 1) + 2z - 1 = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}.$$

d) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{3+i}{4} \neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O) = O'$ et $f(I) = I'$,

on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est le cercle de diamètre [O'I'].



Exercice 2

1) a) Une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$, on en déduit que

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ par suite les coordonnées des foyers de (E) sont $(\sqrt{3}, 0)$ et $(-\sqrt{3}, 0)$ et son excentricité

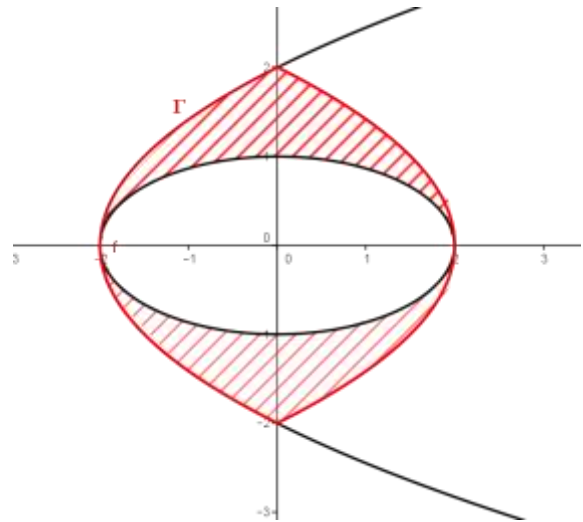
$$\text{est } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $M(x, y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 2(x + 2)$. Soit $\Omega(-2, 0)$ et on pose $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $M(X, Y) \in (P) \Leftrightarrow Y^2 = 2X$, il en résulte que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et la directrice de (P) a pour équation $X = -\frac{1}{2}$. On en déduit que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{5}{2}$.

2) a) $M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = -2|x| + 4 \Leftrightarrow y^2 = -2|-x| + 4 \Leftrightarrow M(-x, y) \in (\Gamma)$. Il en résulte que $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie de (Γ) .

b) $\begin{cases} M(x, y) \in \Gamma \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x + 4 \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ x \in [-2, 0] \end{cases} \Leftrightarrow M \in (P_1)$ où (P_1) est la partie de (P) située dans le demi-plan de frontière $(O, \vec{j})$ contenant le point de coordonnées $(-2, 0)$, il en résulte que $\Gamma = (P_1) \cup (P_2)$ où (P_2) est le symétrique de (P_1) par rapport à $(O, \vec{j})$.



3) a) Pour tout $t \in [0, 2]$, $t^2 + (\sqrt{4-t^2})^2 = t^2 + 4 - t^2 = 4$. Il en résulte que $M(t, \sqrt{4-t^2}) \in C$.

b) $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2} dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C) , les axes du repère et les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$, on en déduit que $I_1 = \frac{\text{Aire du disque de frontière } (C)}{4} = \frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$.

$$4) I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4} dt = -\frac{1}{2} \int_0^2 -2\sqrt{-2t+4} dt = -\frac{1}{3} \left[(-2t+4)\sqrt{-2t+4} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

5) Par raison de symétrie, $\frac{1}{4} \mathcal{A} = I_2 - \frac{1}{2} I_1$ donc $\mathcal{A} = 4I_2 - 2I_1 = \left(\frac{32}{3} - 2\pi\right) \text{ua}$

Exercice 3

1) a) $-9 \times 1111 - 10^4 \times (-1) = -9999 + 10000 = 1$ donc $(-9, -1)$ est solution de (E).

b) Le couple $(-9, -1)$ est solution de (E) donc

$$1111x - 10^4 y = 1111 \times (-9) - 10^4 \times (-1) \text{ donc } 1111(x+9) = 10^4(y+1) \quad (*)$$

donc 1111 divise $10^4(y+1)$ et $1111 \wedge 10^4 = 1$ d'où 1111 divise $(y+1)$ par suite il existe un entier k tel que $y+1 = 1111k$ ou encore $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

en remplaçant y par $1111k - 1$ dans $(*)$, on obtient $x = 10^4 k - 9$.

Ainsi si le couple (x, y) est solution de (E) alors $x = 10^4 k - 9$ et $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $x = 10^4 k - 9$ et $y = 1111k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $1111(10^4 k - 9) - 10^4(1111k - 1) = 1$

On en déduit que $S_{\square \times \square} = \{(10^4 k - 9, 1111k - 1), k \in \square\}$.

2) a) S'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4 q + 1$, alors

$$1111p = 10^4 q + 1 \Leftrightarrow 1111p - 10^4 q = 1, \text{ il en résulte que } (p, q) \text{ est solution de (E).}$$

$$b) \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe deux entiers p et q tels que } n = 1111p \text{ et } n = 10^4 q + 1, \text{ alors d'après a)}$$

(p, q) est solution de (E), il en résulte que $n = 1111(10^4 k - 9) = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square$.

$$\text{Réciproquement : Si } n = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square, \text{ alors } \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}.$$

Ainsi $S_{\square} = \{1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \square\}$.

$$c) \begin{cases} 1111 \times 10^4 k - 9999 \geq 0 \\ k \in \square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{9999}{1111 \times 10^4} = 0.0009 \\ k \in \square \end{cases}, \text{ soit } k = 1 \text{ donc } n = 11100001.$$

Exercice 4

1) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$\frac{1}{e}$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x)} = 0 = g(0)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, il en résulte que g est continue à droite en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) e^{f(x)} \frac{1}{\ln x} = 0 = g'_d(0)$$

c) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = f'(x) e^{f(x)}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

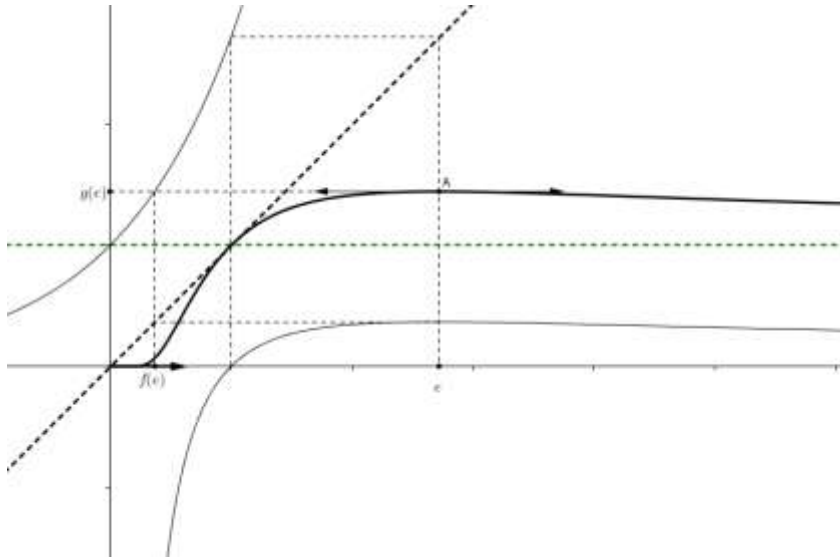
x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	0	$\frac{1}{e^e}$	1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3) a) Voir figure.

$$b) T: y = g'(1)(x - 1) + g(1) = x$$

c)



4) a) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 1.$

b) $u_1 = 1, u_2 = 1.41, u_3 = 1.44$ et pour tout $n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ car g est décroissante sur $[e, +\infty[$, il en résulte que $u_n = g(n) = \sqrt[n]{n}$ est maximal si et seulement si $n = 3$.