



## I) Probabilité sur un ensemble fini

### 1) Vocabulaire des événements

Dans une expérience aléatoire, l'univers  $\Omega$  est l'ensemble de tous les résultats possibles.

\*Un événement est une partie de l'univers.

\*Un **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.

\*Deux événements A, B, sont **disjoints** ou **incompatibles** si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

\*L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement  $\bar{A}$  constitué des éléments de  $\Omega$  n'appartenant pas à A.

### 2) Calcul des probabilités

\*La probabilité d'un événement d'un univers fini  $\Omega$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

\*La probabilité de  $\Omega$  est 1 ( $P(\Omega) = 1$ )

\*La probabilité de  $\emptyset$  est 0 ( $P(\emptyset) = 0$ )

\*Pour tout événement A :  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

#### Propriétés

\*Pour tout événement A,  $0 \leq P(A) \leq 1$

\*Pour tous événements A et B on a  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

\*Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

\*Pour tous événements deux à deux **disjoints** ou **incompatibles**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  on a  
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

\*Pour tout événement A,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ( $\bar{A}$ : Événement contraire de A)

## II) Equiprobabilité

### 1) Définition

Il y a **équiprobabilité** (ou **probabilité uniforme**) si et seulement si tous les événements ont la même probabilité.

la probabilité d'un événement élémentaire  $\{a\}$ ; 
$$p(a) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

## 2) Probabilité d'un événement A

Pour tout événement A (relativement bien sur à l'univers  $\Omega$ , la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

### Remarque

Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrements** (voir cour 3<sup>ème</sup>)

### Exemple :

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement :

A : " le numéro de la face supérieure est multiple de 2 "

$$A = \{2 ; 4 ; 6\}$$

$$\text{card } A = 3$$

$$\text{card } \Omega = 6$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

et, pour tout événement A,

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## III) Probabilité conditionnelle

### 1) Définition

Soient p une probabilité sur  $\Omega$

≠

l'application qui à tout événement B associe le nombre réel  $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

est une probabilité sur  $\Omega$ . On l'appelle **probabilité conditionnelle** relative à A on la note p(B/A)

### 2) probabilités composées

On en déduit la formule dite des **probabilités composées** :

$\cap$

$\times$

### 3) Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B et on a  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

### Remarque

Ne pas confondre indépendant et incompatible

### Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si on a :  $p(B/A) = p(B)$  ou  $p(A/B) = p(A)$

### 4) Arbre de probabilité et formule des probabilités totales :

c'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

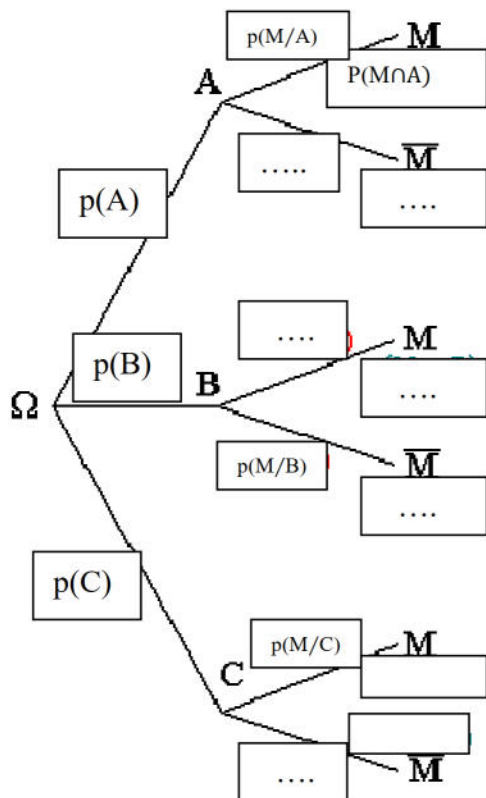
### Remarque

Arbre probabiliste  $\neq$  Arbre à dénombrer

### Exemple

Soit p une probabilité p sur un univers  $\Omega$  et A, B et C trois événements incompatibles et leur réunion est  $\Omega$

Soit un événement M compléter l'arbre probabiliste suivant :



La formule qui permet de calculer  $p(M)$  s'appelle **formule des probabilités totales** :

$$p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$$

$$p(M) = p(M/A) \times p(A) + p(M/B) \times p(B) + p(M/C) \times p(C)$$

### 5) Définition

Soit E un ensemble finie on dit que les parties  $M_1, M_2, \dots$  et  $M_n$  forment une **partition** de E

$$\dots \cup M_n = E$$

!S

Soit  $(E, \mathcal{P}(E); p)$  un espace probabilisé et A un événement

Alors pour toute partition  $M_1, M_2, \dots$  et  $M_n$  des éléments non vide de E on a :

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap M_i) = \sum_{i=1}^n p(A / M_i) p(M_i)$$

### 7) Formule de bayes

Soit E un ensemble finie et  $M_1, M_2, \dots$  et  $M_n$  forment une partition de E

A un événement de probabilité non nulle

$$p(M_i / A) = \frac{p(A / M_i) \cdot p(M_i)}{\sum_{j=1}^n p(A / M_j) \cdot p(M_j)}$$