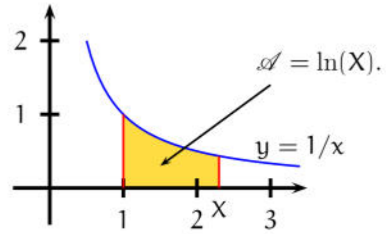
La fonction logarithme népérien

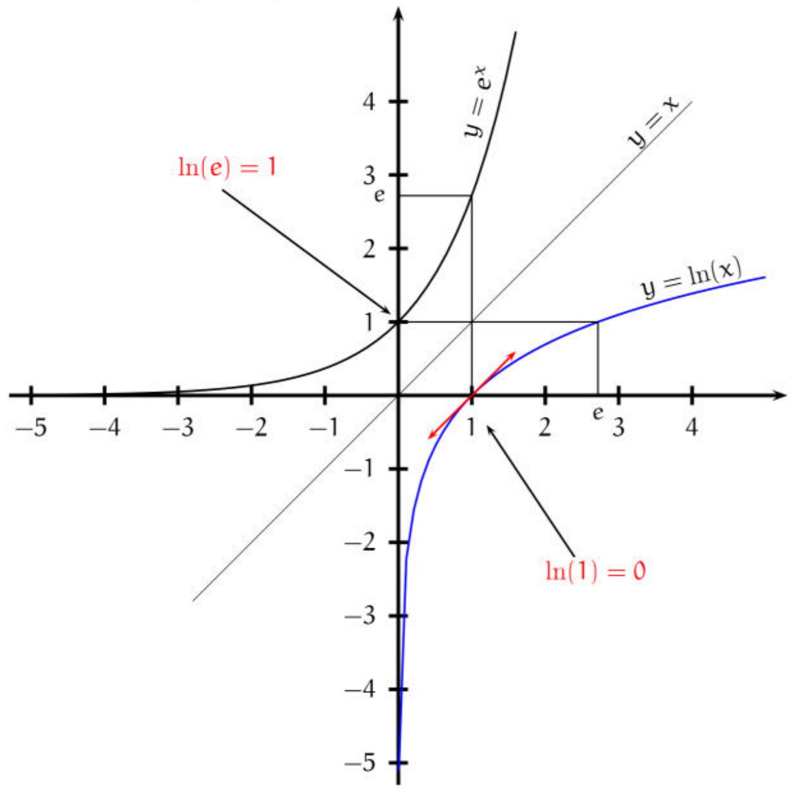
Définition de la fonction logarithme népérien



La fonction logarithme est l'unique fonction f, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f(1) = 0$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.



Propriétés analytiques

- La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

  Pour tout réel $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Limites aux bornes du domaine :

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Théorèmes de croissances comparées :

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0$.

  pour tout entier naturel non nul n,

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\ln(x) = 0$.
- Nombre dérivé en 1 :

  $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$.

Pour tout réel $x > 0$, $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $n\ln(x) = \ln(x^n)$.

Liens avec la fonction exponentielle

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$. Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.

Résolution d'équations et d'inéquations

Pour tout réel a, l'équation $\ln(x) = a$ a une solution et une seule.

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $(\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y)$. Pour tout réel $x > 0$ et tout réel a, $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $(\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y)$. Pour tout rée