



I) Composée de deux fonctions

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Définition

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D et g une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de f et g , la fonction

notée $g \circ f$ et définie pour tout $x \in D$, par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Théorème

Si f et g ont **même sens** de variation, alors $g \circ f$ est **croissante** sur I .

Si f et g ont des sens de variations **contraires**, alors $g \circ f$ est **décroissante** sur I .

Fonctions associées

$g(x) = f(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	$C_g = t_{k\vec{j}}(C_f)$
$h(x) = f(x + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$C_h = t_{-\lambda\vec{i}}(C_f)$
$k(x) = -f(x)$	$C_k = S_{(xx')}(C_f)$
$l(x) = f(-x)$	$C_l = S_{(yy)}(C_f)$

Limite finie en a (a réel)

Remarques

Si une fonction admet une limite en a , cette limite est unique

$$\left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right)$$

Théorème

* f est définie en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

* Si, pour $x \neq a$, $f(x) = g(x)$, où g est une fonction définie en a et telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. alors f admet une limite en a , et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.

A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes.

du plus haut degré.

Opérations sur les limites

$\lim_{x \rightarrow a} f$ \ $\lim_{x \rightarrow a} g$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$?
$-\infty$	$-\infty$?	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} g$ \ $\lim_{x \rightarrow a} f$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	ll'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

si $l' = 0$, on ne peut conclure que lorsque g garde un signe constant au voisinage de a

Les situations marquées ? sont appelées **formes indéterminées**

Limite d'une fonction composée

a, b, l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

Asymptote verticale

Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote

verticale pour la courbe C

Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et C sa courbe représentative.

Définition :

Si la limite de $f(x)$ est un nombre L , quand x tend vers $+\infty$, (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale pour C en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, C sa courbe représentative et D une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère

droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique pour C en $+\infty$ (ou $-\infty$).

Méthode

1) Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) a) Pour montrer qu'une droite donnée D d'équation $y = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote

oblique , on calcule la différence $d(x) = f(x) - (ax + b)$; on étudie la limite à l'infini de $d(x)$ et on doit trouver 0.

b) Pour étudier la position relative de C et de D , on étudie le signe de $d(x)$.