Fiche : Graphes

1. Chaine Eulérienne

Définition

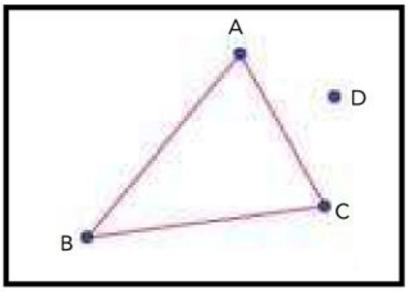
On appelle graphe eulérien un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Propriétés

1. Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf au plus deux.
2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Remarque

Le mot connexe est important dans le théorème ; en effet, le graphe ci-contre a tous ses sommets de degré pair (0 est pair !) mais il n'admet pas de chaîne eulérienne car il n'est pas connexe.



2. Relation entre somme des degrés et nombre d'arêtes

Propriété

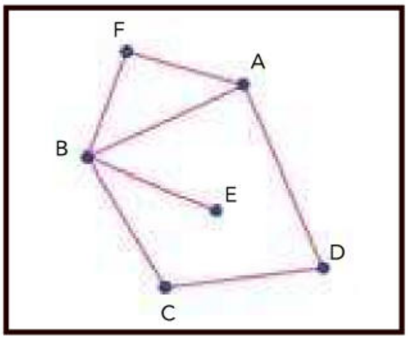
La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

Conséquence : on ne peut donc pas avoir de graphe ayant un seul sommet de degré impair.
En effet, dans l'exemple ci-dessous, le sommet A a pour degré 3 mais les arêtes qui partent de A comptent pour le degré des sommets F, B et D. Chaque arête compte donc 2 fois pour le total des degrés.

Exemple

Voici un graphe ayant 7 arêtes. On a bien $14 = 2 \times 7$.

Sommet	A	B	C	D	E	F	Total
Degré	3	4	2	2	1	2	14



3- Comment savoir si un graphe admet une chaîne eulérienne

MÉTHODE

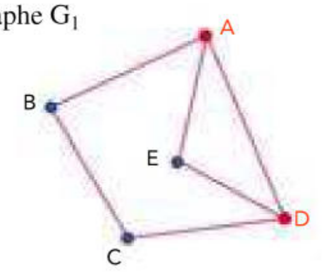
- Pour savoir si un graphe connexe admet une chaîne eulérienne, on compte les sommets dont le degré est impair.
- Pour savoir si un graphe connexe admet un cycle eulérien, on détermine si tous ces sommets sont d'ordre pair.

Énoncé

1. Le graphe G_1 ci-dessous admet-il une chaîne eulérienne ?
2. Le graphe G_2 ci-dessous admet-il un cycle eulérien ?
3. Le graphe G_3 ci-dessous admet-il une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien ?

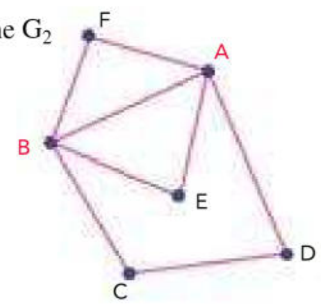
Solution

Graphe G_1



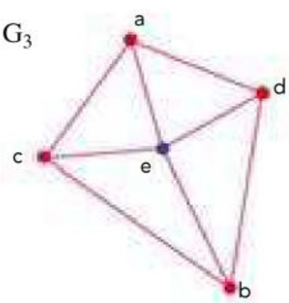
Le graphe G_1 est connexe, il a **deux** sommets de **degré impair** : les sommets A et D (degré 3).
Le théorème d'Euler permet d'affirmer que ce graphe admet une chaîne eulérienne.
Remarque : une chaîne eulérienne « part » d'un sommet impair et « arrive » sur un sommet impair.
Exemples : (A ; B ; C ; D ; E ; A ; D) ; (D ; E ; A ; D ; C ; B ; A).

Graphe G_2



Dans le graphe G_2 les sommets C, D, E et F sont de degré 2 et les sommets B et A sont de degré 4.
Puisque tous les sommets sont d'ordre pair, d'après le théorème d'Euler, il admet un cycle eulérien. Par exemple :
(C ; D ; A ; E ; B ; A ; F ; B ; C).

Graphe G_3



Le graphe G_3 est connexe, il a **4 sommets de degré 3** : les sommets a, c, b et d.
Donc, d'après le théorème d'Euler il n'admet ni de chaîne eulérienne, ni de cycle eulérien.

3- Le nombre chromatique

Définition

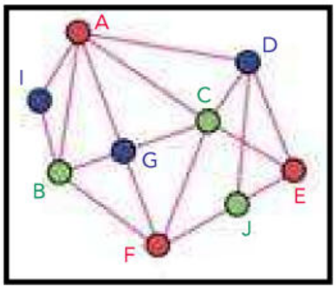
Le nombre chromatique est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets d'un graphe sans que deux sommets adjacents du graphe soient de la même couleur.

Théorème

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $r + 1$, où r est le plus grand degré des sommets.

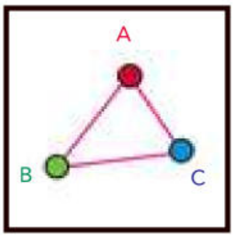
EXEMPLE

Le plus grand degré du graphe ci-contre est 5 (sommet C) et le nombre chromatique est bien inférieur à 6 puisqu'il est égal à 3.

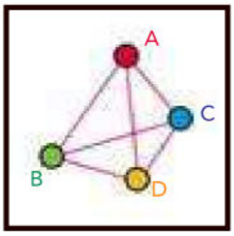


Propriétés

1. Tout graphe contenant un triangle complet nécessite au moins trois couleurs.



2. Tout graphe contenant un quadrilatère complet nécessite au moins quatre couleurs.



Remarque

Ces deux derniers résultats permettent souvent de trouver le nombre chromatique d'un graphe. En effet si ce graphe contient un sous graphe complet à 4 sommets, il faut au moins 4 couleurs. Si on arrive à colorier le graphe avec 4 couleurs alors on peut affirmer que le nombre chromatique est 4.

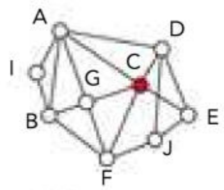
4- Comment rechercher le nombre chromatique d'un graphe

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit (on ne tient pas compte de l'ordre pour les sommets de même degré).

Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

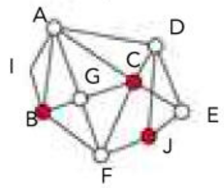
On choisit une couleur pour le premier sommet de la liste.

On choisit de colorier le sommet C en rouge.



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

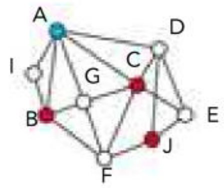
On colorie en rouge les sommets non adjacents à C et non adjacents entre eux : B ; J.



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

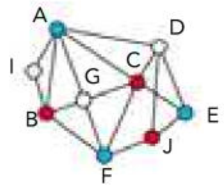
2. On réitère le procédé vu au 1 en prenant une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste.

On colorie A en bleu.



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

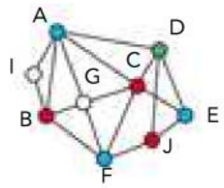
On colorie ensuite F et E en bleu.



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

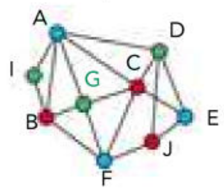
3. On réitère le procédé.

On colorie en vert le point D.



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

On colorie ensuite G et I en vert



Sommet	C	A	D	F	B	G	E	J	I
Degré	5	5	4	4	4	4	3	3	2

BILAN

Ce graphe contient des triangles complets (et pas de quadrilatères complets) ; il faut donc au moins trois couleurs, on a réussi avec trois couleurs donc le nombre chromatique est 3.