

Formes indéterminées

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :

Formes indéterminées		
$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$+\infty - \infty$		

Indéterminations levées par le cours

Polynômes, fonctions rationnelles

- La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Nombres dérivés

Les limites suivantes sont fournies dans le cours. Elles fournissent toutes un nombre dérivé.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Théorèmes de croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et pour tout réel $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$. Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ et pour tout réel $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$. Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$.

Quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations

Mise en facteur du terme prépondérant

Exemple 1. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 - e^x$.

- On classe les termes **par ordre décroissant de prépondérance** : $-e^x + x^3 - 1$
- On met le **prépondérant en facteur** : $-e^x \left(1 - \frac{x^3}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$
- Puisqu'on a mis le terme prépondérant en facteur, la parenthèse commence par 1 et continue par des termes tendant vers 0 : $\frac{x^3}{e^x} = \frac{1}{e^x/x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$... La parenthèse tend donc vers 1 et l'expression vers $-\infty$.

Exemple 2. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}}$.

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = \frac{x^2 - 1}{e^x + 1 + e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}} = \frac{1}{e^x/x^2} \times \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$. D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}} = 1$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x^2} = 0$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = 0$. La mise en facteur des prépondérants a permis de faire apparaître le face à face $\frac{e^x}{x^2}$ en $+\infty$.

Limite en $-\infty$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = \frac{x^2 - 1}{e^{-x} + 1 + e^x} = \frac{x^2}{e^{-x}} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + e^x + e^{2x}} = x^2 e^x \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2x}$

et on trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = 0$.

Exemple 3. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x$.

On met le prépondérant en facteur dans $\sqrt{4x^2 + x}$ pour comprendre que $\sqrt{4x^2 + x}$ vaut environ $\sqrt{4x^2} = 2x$ quand x est grand et donc que l'expression vaut environ x .

Pour $x > 0$, $\sqrt{4x^2 + x} - x = \sqrt{4x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = x \left(2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1 \right) \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x = +\infty$.

Utilisation d'une quantité conjuguée

Exemple 4. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$.

Quand x est grand, $\sqrt{x^2 + x}$ vaut environ $\sqrt{x^2} = x$. Aucun des termes $\sqrt{x^2 + x}$ et x ne va l'emporter devant l'autre. Il faut maintenant voir plus explicitement le face à face $\sqrt{x^2} - x = x - x$ et pour cela élever au carré $\sqrt{x^2 + x}$ et x . C'est le but de la multiplication du numérateur et du dénominateur par la quantité conjuguée.

Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.

L'indétermination était $+\infty - \infty$. Elle est maintenant $\frac{\infty}{\infty}$. La mise en facteur des prépondérants au numérateur et au dénominateur permet alors de voir que l'expression vaut environ $\frac{x}{2x}$.

Pour $x > 0$, $\frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \frac{x}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$.

Utilisation d'un taux d'accroissement

Exemple 5. Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x-x^2}$.

L'indétermination est $\frac{0}{0}$ qui est l'indétermination typique dans les calculs de nombre dérivé $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et doit donc éveiller les soupçons. Un certain stock de ces nombres dérivés sont fournis une bonne fois pour toutes en cours.

Ici, on utilise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ qui donne la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 (ou la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ en 1).

Pour $x > -1$ et $x \neq 0$ et $x \neq 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{1-x} \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = 1$.

Exemple 6. Trouver $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi}$.

De nouveau $\frac{0}{0}$. On fait apparaître le taux d'accroissement de la fonction sinus en $\frac{\pi}{6}$.

Pour $x \neq \frac{\pi}{6}$, $\frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi} = \frac{2}{6} \times \frac{\sin(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$.

Quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$ tend vers $\sin' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.