6. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Théorème

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

Réciproquement : si le nombre complexe z s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

Définition

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ s'appelle écriture trigonométrique de z

On note aussi : $z = [r, \theta]$

Exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$. Trouver la forme trigonométrique de z
2. Soit $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver la forme trigonométrique de z

Correction :

1) • Si $a > 0$ alors $a(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z

• Si $a < 0$ alors $z = -a(-\cos\theta - i\sin\theta)$

$= \boxed{-a\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right)}$ est la forme trigonométrique de z

Rappel : $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$; $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

2) $z = r(\sin\theta + i\cos\theta) = \boxed{r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]}$

Rappel : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

Propriété

Pour tout z et $z' \in \mathbb{C}^*$: $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété (relation entre forme algébrique et forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$, on a:

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \ ; \ \cos\theta = \frac{a}{r} \ \text{et} \ \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Exercice

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ ; \ z_2 = -8 + 8i$$

• $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta \equiv \arg(z_1)\ [2\pi]$ alors $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

- $z_2 = -8 + 8i$

$|z_2| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$

Soit $\theta' = \arg(z_2)\ [2\pi] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\theta' = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta' = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

donc $\boxed{z_2 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$

Propriétés

1) $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr' ; \theta + \theta']$; $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ .. pour tous z et $z' \in \mathbb{C}^*$
2) $\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r} ; -\theta\right]$ .. ; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
3) $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta'\right]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ pour tous z et $z' \in \mathbb{C}^*$
4) $[r,\theta]^n = [r^n ; n\theta]$ ... ; $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$; pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$
5) Si $z = [r,\theta]$ alors $-z = [r ; \theta + \pi]$.... et $\bar{z} =$ ... $[r ; -\theta]$ ... .

Application :

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
2. Soit $z = \frac{z_1}{z_2}$. donner l'écriture trigonométrique puis l'écriture algébrique de z
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Correction :

1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}} ; \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$

$= \boxed{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1^2 + 1^2} = \frac{(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

3) $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$