02
série

BAC

ANALYSE
Equations Différentielles

EXERCICE N°1 :	15'	4 points

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in IR$;

$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

EXERCICE N°2 :	40'	6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$ et h la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0. On pose $g(x) = h(x) - xe^{-x}$.

a) Calculer $g(0)$.

b) Vérifier que g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = 0$.

c) Expliciter alors $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$; $h(x) = f(x)$.

2) soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 5x + \frac{13}{2}\right)e^{-2x}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire le volume $\mathcal{V}$ en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie de C_f pour $-2 \le x \le 0$

EXERCICE N°3 :	40'	6 points

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$.
2) On désigne par f la solution particulière de (E) et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Déterminer f sachant que le point $A(1, -\sqrt{2}) \in C_f$ et que C_f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.
4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2, -1]$.

EXERCICE N°4 :	40'	6 points

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.
b) Déterminer alors z en fonction de x.
2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.
3) Soit (C) la courbe représentative de f dans en repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).
b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).
c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.