Propriétés de l'integrale

Relation de chasles :

Si f est continue sur un intervalle I

Alors pour tous réel a, b, c de I on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Linéarité de l'intégrale :

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ alors :

- $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
- $$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
- $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx .$$
- $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

où α et β sont deux constantes indépendante de x

NETSCHOOL1 ACADEMY

Exemple : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calculer $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

Rep :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \boxed{\sqrt{2}}.$$

Exemple : Calculer $I = \int_0^{\pi} (2\sin t + \cos t + 3)\,dt$

Rep :

$$\int_0^{\pi} (2\sin t + \cos t + 3)\,dt = 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt + \int_0^{\pi} \cos t\,dt + \int_0^{\pi} 3\,dt$$

$$= 2[-\cos t]_0^{\pi} + [\sin t]_0^{\pi} + 3[t]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{3+\pi}$$