Prolongement Par Continuité.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie L lorsque x tend vers a.

La fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a) = L \end{cases}$$

est un prolongement par continuité en a de la fonction f.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

2) f est-elle prolongeable par continuité en -1.

Rep:

1) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}$

$= -2 \in \mathbb{R}$.

2) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$ donc f est prolongeable par continuité en -1 .

et le prolongement par continuité de f en -1 est :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{Si } x \neq -1 \, . \\ g(-1) = -2 \, . \end{cases}$$