Moyenne d'une fonction

NETSCHOOL1 ACADEMY

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ où $a<b$. On appelle moyenne de f sur $[a,b]$, le réel noté $\overline{f}_{[a,b]}$ et défini par :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

exemple : Déterminer la valeur moyenne sur $[0,\pi]$ de la fonction $f : t \longmapsto \sin t$

Rep : par définition on a :

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\times 2 = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ où $a<b$, alors il existe c appartenant à $[a,b]$ tq $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Démonstration :

La fonction f est continue sur $[a,b]$

on déduit des valeurs intermédiaires que

$$f([a,b]) = [m,M]$$

avec $m = \min f$ et $M = \max f$

Comme $m \leq \overline{f} \leq M$

donc il existe $c \in [a,b]$ telque :

$$\boxed{\overline{f} = f(c)}$$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

Soient m son minimum et M son maximum sur $[a,b]$ alors :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Démonstration :

de la double inégalité $m \leqslant f(t) \leqslant M$,
on déduit que :

$$\int_a^b m\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt.$$

$$\Leftrightarrow (b-a)m \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)M$$

Ainsi $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant M$

Exemple :

Montrer que $\frac{9}{9+4\pi^2} \leqslant \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{4+\pi^2}$

Rep : posons $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

il est clair que f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, on a donc :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) \; ; \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

En appliquant L'inégalité de la moyenne on obtient :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{9+4\pi^2} \leqslant \frac{6}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{4+\pi^2}$$