donc $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une demi-tangente horizontale à droite en $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$

**Donc $f^{-1}$ est dérivable à droite en $0$ et $(f^{-1})'_d(0)=0$**

$\forall x\in J$ ; $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(t)}$ avec $t = f^{-1}(x)$

$\iff f(t)=x$

$\iff \sqrt{1+\tan t} = x$

$\iff 1+\tan t = x^2$

$\iff \tan t = x^2-1.$

$$= \frac{2\sqrt{1+\tan t}}{1+\tan^2 t}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2}}{1+(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2|x|}{1+x^4-2x^2+1}$$

$$= \boxed{\frac{2x}{x^4-2x^2+2}}$$

3°) Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur J et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$.

$f$ est dérivable $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$
et $\forall x \in ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ ; $f'(x) \neq 0$
donc $f^{-1}$ est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) = \boxed{]0, +\infty[}$

**Méthode analytique**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x} = \lim_{y \to -\frac{\pi}{4}^+} \frac{y - (-\frac{\pi}{4})}{f(y) - f(-\frac{\pi}{4})}$$

on pose $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$.

$x \to 0^+$
$y \to -\frac{\pi}{4}^+$

$$= \lim_{y \to -\frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{\frac{f(y) - f(-\frac{\pi}{4})}{y - (-\frac{\pi}{4})}}$$

$f(-\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

Donc $f^{-1}$ est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1}_d)'(0) = 0$

**Conclusion** : $f$ est dérivable sur J

**Méthode graphique**

On a : $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x - (-\frac{\pi}{4})} = +\infty$

NETSCHOOL1 ACADEMY