Comment expliciter la fonction réciproque

Ce qu'on doit retenir :

$$\begin{cases} x \in I \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(I) \\ f^{-1}(y) = x \end{cases}$$

Remarque :

- $\forall x \in I \; ; \; f^{-1} \circ f(x) = \boxed{x}$.
- $\forall x \in f(I) \; ; \; f \circ f^{-1}(x) = \boxed{x}$

Exemples :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x - \frac{1}{x}$

1) m.que la restriction g de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2) expliciter $g^{-1}(x)$; $\forall x \in I$.

NETSCHOOL1
ACADEMY

Rep:

1) $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ sont Continue Sur $]0,+\infty[$

Ainsi $\boxed{g \text{ est Continue Sur }]0,+\infty[}$ (1)

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$.

Ainsi $\boxed{g \text{ est strictement Croissante Sur }]0,+\infty[}$ (2)

CONCLUSION

d'après (1) et (2) on Conclut que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$g(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} g(x) \,;\, \lim_{x\to+\infty} g(x)[$

$=]-\infty, +\infty[$

$= \boxed{\mathbb{R}}$

2) $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in]0,+\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$g(x) = y \iff x - \dfrac{1}{x} = \boxed{y}$

$\iff \dfrac{x^2 - 1}{x} = y$

$\iff x^2 - 1 = xy$

$\iff x^2 - xy - 1 = 0$

Le discriminant $\Delta = y^2 + 4 > 0$

Ainsi $x_1 = \dfrac{y - \sqrt{y^2+4}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2} > 0$

$x_1 = \dfrac{\cancel{y^2} - \cancel{y^2} - 4}{2\left(y + \sqrt{y^2+4}\right)} < 0$

Comme $\boxed{x \in]0, +\infty[.}$

Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}$; $g^{-1}(y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$

ou bien on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\boxed{g^{-1}(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}}$