Dérivée d'une fonction Réciproque

NETSCHOOL1
ACADEMY

Ce qu'on doit retenir :

Soit f une bijection de I sur $f(I)$

Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I$ $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall y \in f(I) \; ; \; (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

avec $f^{-1}(y) = x$.

Exemple :

on Considère la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \sin x$.

1) montrer que f est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$

2) m. que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$; $\forall x \in [0, 1[$

Rep:

1) f est continue strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc elle réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}]$ sur :

$$f([0,\frac{\pi}{2}]) = [f(0), f(\frac{\pi}{2})] = \boxed{[0,1]}$$

2) f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ on a : $f'(x) = \cos x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}} .$$

f dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

et $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[$

donc f^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } f^{-1}(x) = y$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$\Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sin y = x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 y = x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 y = x^2$$

$$\Leftrightarrow \cos y^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{1-x^2}$$

Ainsi $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in [0,1[$.

NETSCHOOL1
ACADEMY

Exemple ② :

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = 2 + \cos(2x)$

1) montrer que f est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Calculer $f^{-1}(\frac{5}{2})$ et $(f^{-1})'(\frac{5}{2})$

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, 3[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

Rep:

1) f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a :

$f'(x) = -2\sin 2x \leqslant 0$

donc f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

f est continue strictement décroissante donc elle réalise une bijection de

$[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([0,\frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)]$

$= \boxed{[1, 3] = J}$

2) $f^{-1}(\frac{5}{2}) = a \Leftrightarrow f(a) = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow 2 + \cos 2a = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2a = \frac{1}{2}$ et $2a \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow 2a = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6}$

Ainsi $\boxed{f^{-1}(\frac{5}{2}) = \frac{\pi}{6}}$

$$(f^{-1})'(\frac{5}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{5}{2}))}$$

$$= \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{1}{-2\sin(2 \times \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{1}{-2\sin(\frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{1}{-2 \times \sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

NETSCHOOL1
ACADEMY

Ainsi $\boxed{(f^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

3) f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

et $f'(x) \neq 0 \ \forall\ x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

donc $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]0,\frac{\pi}{2}[) =]1,3[}$

$\forall x \in]1,3[\ ; \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$= \frac{1}{f'(y)}$

avec $f^{-1}(x) = y$

$\Longleftrightarrow f(y) = x$

$\Longleftrightarrow 2 + \cos 2y = x$

$= \frac{1}{-2\sin(2y)}$

$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in]1,3[\quad (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}}$

$\Longleftrightarrow \cos 2y = x-2$

$\Longleftrightarrow \cos^2 y = (x-2)^2$

$\Longleftrightarrow 1-\sin^2 2y = (x-2)^2$

$\Longleftrightarrow \sin^2(2y) = 1-(x-2)^2$

$\Longleftrightarrow \sin^2(2y) = -x^2+4x-3$

$\Longleftrightarrow \sin(2y) = \sqrt{-x^2+4x-3}$

Car $\sin 2y \geq 0$.

$\forall\ y \in [0,\frac{\pi}{2}]$