Fonction Bijective

Définition :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
La fonction f est une bijection de I sur J SSi les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\forall x \in I$, le réel $f(x) \in J$
- $\forall y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une seule solution x dans I

Théorème :

Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de $\boxed{I}$ sur $\boxed{f(I)}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = 2 + \cos(2x)$.
Montrer que f réalise une bijection

de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Rep :

- f est Continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x) = -2\sin 2x$

or $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow \sin 2x \geq 0$

donc $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $f'(x) \leq 0$.

Ainsi f est Strictement décroissante.

CONCLUSION

f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur :

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = \boxed{[1,3] = J}$$