Fonction définies par Integrale

Théorème ① :

Si f une fonction Continue sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. alors la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ est la primitive de f qui s'annule en a.

$\boxed{\text{(c'àd } \forall x \in I \text{ ; } F'(x) = f(x)\text{)}}$.

exemple :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

déterminer la primitive de f qui s'annule en 2 sur $]1, +\infty[$.

Rep :

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{(t-1)^3}\,dt$$

$$= \left[\frac{-1}{2(t-1)^2}\right]_2^x$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$$= \frac{-1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2}$$

Ainsi la primitive F de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est :

$$\boxed{F(x) = \frac{-1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2}}$$

Théorème 2 :

Si f une fonction continue sur un intervalle I ; u une fonction dérivable sur J telque $\boxed{u(J) \subset I}$ et a un réel appartenant à I alors :

la fonction g définie sur J par :

$$g(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$ est dérivable sur J

et $\forall x \in J$ on a :

$$\boxed{g'(x) = u'(x) \cdot f[u(x)]}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY

Exemple :

Montrer que la fonction $h(x)=\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$.

Rep :

on a $x \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

aussi $x \overset{u}{\longmapsto} 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$

alors la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,dt$

est dérivable sur J et on a :

$$h'(x) = (2x)'\sqrt{1+(2x)^2}$$

$$= \boxed{2\sqrt{1+4x^2}}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY

Théorème ③ :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Théorème ④ :

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T alors :

$\forall a \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$