Inégalité des accroissement finie.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a,b[$; soit deux réels m et M.

Si $\boxed{m \leqslant f'(x) \leqslant M}$; $\forall x \in]a,b[$

alors :

$$\boxed{m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)}$$

Corollaire :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M>0$.

Si $|f'(x)| \leqslant M$; $\forall x \in I$

alors :

$$\boxed{|f(b)-f(a)| \leqslant M\,|b-a|}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

Exemples :

Soit $f : [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto tg(x)$

1) m. que $1 \leq f'(x) \leq 2$; $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

2) En déduire que $t \leq tg(t) \leq 2t$;

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Rep :

1) f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

et on a : $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 0 \leq \cos x \leq \cos \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \cos^2 x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq 2$

$\Leftrightarrow \boxed{1 \leq f'(x) \leq 2}$.

NETSCHOOL1 ACADEMY

NETSCHOOL1
ACADEMY

2) on a f Continue dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ en particulier sur $[0, t] \subset [0, \frac{\pi}{4}]$

or $\boxed{1 \leqslant f'(x) \leqslant 2}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Ainsi d'après le théorème des inégalités des accroissement finis on a :

$$1(t-0) \leqslant f(t) - f(0) \leqslant 2(t-0)$$

$$t \leqslant tg(t) - tg(0) \leqslant 2t$$

Ainsi $\boxed{t \leqslant tg(t) \leqslant 2t \, .}$ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$

1/a/ montrer que $\forall x \in [1,2]$; $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

b/ montrer que $\forall x \in [1,2]$ on a :

$$|f(x) - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2} |x - \sqrt{2}|$$

Rep :

a/ $\forall x \in [1,2]$ on a : $f'(x) = 1 + \frac{1}{4}(-2x)$

$\boxed{= 1 - \frac{1}{2}x}$.

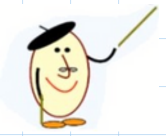
or $1 \leq x \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1-\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$



- $-a \leq f'(x) \leq a \Leftrightarrow |f'(x)| \leq a$
- $0 \leq f'(x) \leq a \Leftrightarrow |f'(x)| \leq a$

b) f est continue dérivable sur $[1,2]$

en particulier sur $[\sqrt{2}, x] \subset [1,2]$

et $\forall\, x \in [1,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finie on peut écrire :

$$|f(x) - f(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$$

or $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{4}\left(2 - (\sqrt{2})^2\right) = \boxed{\sqrt{2}}$.

Ainsi $\boxed{\forall\, x \in [1,2] \;;\; |f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|}$

Suite exemple : **Accroissement finie et Suite recurrente.**

2) Soit la Suite (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{4}(2 - U_n^2) \end{cases}$$

on admet que $1 \leq U_n \leq 2$

a) m. que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|U_n - \sqrt{2}|$

b) en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|U_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Rep :

2) a) on a $U_n \in [1,2]$ donc d'après 1) b)

$$|f(U_n) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|U_n - \sqrt{2}|$$

donc $\boxed{|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|U_{n+1} - \sqrt{2}|}$

b) pour $n = 0$; $|U_0 - \sqrt{2}| = |1 - \sqrt{2}| \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $|U_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et montrons que $\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

on a : $\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|U_n-\sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Donc par recurence ; $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left|U_n-\sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - \sqrt{2} = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}.}$

NETSCHOOL1 ACADEMY