Dérivabilité des fonctions Composées

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.
Soit g une fonction définie sur $f(I)$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0)$$

Corollaire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Exemple : Soit $f(x) = \sin\left(\sqrt{x-1}\right)$

Etudier la dérivabilité de f sur $]1,+\infty[$.

Rep : $f(x) = u \circ v(x)$; $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \sqrt{x-1}$

•) $x \longmapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

•) $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme $]1,+\infty[\subset \mathbb{R}$

Ainsi $x \longmapsto \sin\left(\sqrt{x-1}\right)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

et on a :

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \times \cos\left(\sqrt{x-1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\cos\left(\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}}}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY

Exemple : Soit $h(x) = \cos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Etudier la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$.

Rep : $h(x) = u \circ v\,(x)$

avec $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

aussi $x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a :

$$h'(x) = v'(x)\; u'(v(x))$$

$$= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' \times \left(-\sin(v(x))\right)$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \times \left(-\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)$$

$$= \boxed{\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$