

Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Définition:

f est dérivable en $a \iff$

- ♦ f dérivable à droite en a
- ♦ f dérivable à gauche en a
- ♦ $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Interprétation géométrique:

♦ Si f est dérivable à droite en a donc ℓ_g admet une **demi-tangente** à droite
 l'équation :

$$T_d : y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$$

♦ Si f est dérivable à gauche en a donc ℓ_g admet une **demi-tangente** à gauche
 l'équation :

$$T_g : y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple:

Soit f la fonction définie par :



$$\begin{cases} x^2 + 1 & \text{pour } x < 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

Etudier sa dérivabilité en 1 et interpréter graphiquement les résultats.

Rep:

♦ dérivabilité à droite en 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\cancel{(x - 1)}}{x\cancel{(x - 1)}} = -1 \in \mathbb{R} = f'_d(1) \end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -1$

graphiquement = f admet une demi-tangente à droite en 1 d'éq : $T_d : y = f'_d(1)(x - 1) + f(1)$
 $= -(x - 1) + 2$
 $= -x + 1 + 2$

$$T_d : y = -x + 3$$

◆ **Dérivabilité à gauche en 1 :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \\ &= 2 \in \mathbb{R} = f'_g(1) \end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 2$.

graphiquement : f admet une demi-tangente à gauche en 1 d'équation

$$\begin{aligned} T_g : y &= f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) + 2 \\ &= 2x - \cancel{2} + \cancel{2} \end{aligned}$$

$$T_g : y = 2x$$



$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite en } 1 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } 1 \\ f'_d(1) \neq f'_g(1) \end{array} \right.$

Ainsi f n'est pas dérivable en 1.

graphiquement:

f admet un point anguleux au point
d'abscisse 1.

