Dérivabilité sur un intervalle.

Ce qu'on doit savoir :

- Toute fonction polynome est dérivable sur $\mathbb{R}$

- $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ g \text{ est dérivable sur } I \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I. \end{cases}$

  alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivable sur I.

- $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ f(x) > 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$

  alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I.

- Si f est dérivable sur I alors la fonction αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont dérivable sur I.

Remarques :

- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.
- Les fonctions Cosinus et Sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$
- La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- La fonction Cotangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \}$.

exemples : Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I dans chaque cas :

- $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$; $I = \mathbb{R}$

Rep :

$x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $x \longmapsto 1+\cos^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

or $1+\cos^2 x \neq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ainsi } x \longmapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

$f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}$; $I = [0, \frac{1}{2}]$

Rep :

$x \longmapsto 1+x+x^2$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, \frac{1}{2}]$

$x \longmapsto 1-x^2$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, \frac{1}{2}]$

or $1-x^2 \neq 0 \ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

$\boxed{\text{Ainsi } x \longmapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2} \text{ est dérivable sur } [0, \tfrac{1}{2}]}$

NETSCHOOL1
ACADEMY

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \quad ; \quad I =]2, +\infty[$$

Rep:

$x \longmapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]2, +\infty[$

aussi $x - 1 > 0 \quad \forall\, x \in]2, +\infty[$

donc $x \longmapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$

$x \longmapsto x - 2$ est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]2, +\infty[$

or $x - 2 \neq 0 \quad \forall\, x \in]2, +\infty[$

Ainsi $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$

NETSCHOOL1
ACADEMY