Définition de l'integrale d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction Continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. pour tous réels a et b de I, le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F.

on L'appelle intégrale de f de a à b

et on le note : $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $[F(x)]_a^b$

d'où : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = \boxed{F(b)-F(a)}$

Exemple :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+tg^2(t)\,dt$.

Rep :

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))$$

$$= \boxed{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+tg^2(t))\, dt = [tg(t)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg(0)$$
$$= 1 - 0$$
$$= \boxed{1}.$$

Remarque :

- Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, la lettre x peut être remplacée par t ou une autre lettre quelconque.
- on aura : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.
- La fonction φ définie sur l'intervalle I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ est telle que : $\varphi'(x) = f(x)$ et $\varphi(a) = 0$ donc φ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Conséquences :

- $$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0 .$$

- $$\int_a^b 0\,dx = \left[C\right]_a^b = C - C = 0$$ avec $(C \in \mathbb{R})$

- $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$ (règle d'inversion des bornes)