EXERCICE N°4 :	**15'**	**4 points**	

On considère les équations différentielles :

$(E_0): (1+e^x)y' - y = 0$ et $(E): (1+e^x)y' - y = e^{2x}$

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur IR.

on a : $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

et $\forall x \in IR$; $g'(x) = \dfrac{2e^{2x}(1+e^x) - e^{2x}e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{3x} - e^{3x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^2}$$

$$(1+e^x)g'(x) - g(x) = (1+e^x)\frac{2e^{2x}+e^{3x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$= \frac{2e^{2x} + e^{3x} - e^{2x}}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{3x}}{1+e^{x}} = \frac{e^{2x}\cancel{(1+e^{x})}}{\cancel{1+e^{x}}}$$

$$= e^{2x}.$$

$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \ g \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$

NETSCHOOL1
ACADEMY

2) Soit f une fonction dérivable sur IR. Montrer que f est une solution de (E) si est seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

f est solution de (E).

$$\Leftrightarrow (1+e^x)\, f'(x) - f(x) = e^{2x}$$

or g est aussi solution de (E).

$$\Leftrightarrow (1+e^x)\, f'(x) - f(x) = (1+e^x)\, g'(x) - g(x)$$

$$\Leftrightarrow (1+e^x)\left(f'(x) - g'(x)\right) - \left(f(x) - g(x)\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1+e^x)\left(f(x) - g(x)\right)' - \left(f(x) - g(x)\right) = 0$$

Ainsi : $(f - g)$ est solution de (E_0).

3) On pose $z = (1 + e^x)y$

a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur IR alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

y est solution de $(E_0) \iff (1+e^x)y' - y = 0$ (1)

or $z = (1+e^x)y \iff y = \dfrac{z}{1+e^x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad y' = \dfrac{(1+e^x)z' - e^x z}{(1+e^x)^2}$

donc (1) :

$$(1+e^x)\,\frac{(1+e^x)z' - e^x z}{(1+e^x)^2} - \frac{z}{1+e^x} = 0.$$

$$\iff \frac{(1+e^x)z' - e^x z}{1+e^x} - \frac{z}{1+e^x} = 0.$$

$$\iff (1+e^x)z' - z(e^x+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+e^{x})(z'-z)=0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z'-z=0.}$$

<u>Ainsi</u> z est solution de l'éq différentielle (E') : $z'-z=0$.

b) En déduire que les solutions de (E) sur IR sont les fonctions f définies par : $f(x) = \frac{ke^x+e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in IR$.

on a z est solution de l'éq E'

$$z' - z = 0 \iff z' = z$$

donc $\boxed{z = ke^x}$; $(k \in \mathbb{R})$

or $z = (1+e^x)\,y \iff \boxed{y = \frac{ke^x}{1+e^x}}$ $(k \in \mathbb{R})$.

on a aussi $(f-g)$ est solution de (E_0) donc :

$$f(x) - g(x) = \frac{ke^x}{1+e^x} \ ; \ (k \in \mathbb{R})$$

donc $f(x) = g(x) + \dfrac{k e^x}{1+e^x}$; $(k \in \mathbb{R})$

$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) = \dfrac{e^{2x} + k e^x}{1+e^x} \;;\; k \in \mathbb{R}}$

4) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1+e^x}$ Etudier les variations de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$;

et $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{(2e^{2x} - 3e^x)(1+e^x) - (e^{2x} - 3e^x)e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{3x} - 3e^x - \cancel{3e^{2x}} - e^{3x} + \cancel{3e^{2x}}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^{2x} + 2e^x - 3)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^{2x} + 2e^x + 1 - 4)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x\left((e^x+1)^2-4\right)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x\left((e^x+1-2)(e^x+1+2)\right)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x-1)(e^x+3)}{(1+e^x)^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de

$e^x - 1$.

$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1$.

$\iff x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \frac{e^{0} - 3e^{0}}{1+e^{0}} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 3e^{x}}{1+e^{x}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 3e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{x}}\left(e^{x} - 3\right)}{\cancel{e^{x}}\left(\frac{1}{e^{x}} + 1\right)}$$

$$= \boxed{+\infty},$$

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

h est continue strictement croissante

donc elle réalise une bijection

de $[0,+\infty[$ sur $h([0,+\infty[) = [h(0), \lim_{+\infty} h[$

$= [-1,+\infty[$

$= J$

b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h, expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

$$\begin{cases} h^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} h(y) = x \\ y \in [0,+\infty[\end{cases}$$

$$h(y) = x \iff \frac{e^{2y} - 3e^{y}}{1+e^{y}} = x$$

$$\iff e^{2y} - 3e^{y} = x + xe^{y}$$

$$\iff e^{2y} - e^{y}(3+x) - x = 0 \,,$$

$$\Delta = (3+x)^2 + 4x.$$

$$= x^2 + 6x + 9 + 4x.$$

$$= x^2 + 10x + 9.$$

donc $e^y = \dfrac{3+x+\sqrt{x^2+10x+9}}{2}$

ou $e^y = \dfrac{3+x-\sqrt{x^2+10x+9}}{2}$ à rejeté

car $x \in [-1,+\infty[$

Par la suite $e^y = \dfrac{3+x+\sqrt{x^2+10x+9}}{2}$

donc $y = \ln\left(\dfrac{3+x+\sqrt{x^2+10x+9}}{2}\right)$

$$\boxed{\text{Ainsi : } h^{-1}(x) = \ln\left(3+x+\sqrt{x^2+10x+9}\right) - \ln(2) \quad \forall x \in J.}$$

6) a) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes de f et de h^{-1}.