EXERCICE N°3 :	15'	4 points	🌶️

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

On a $y' - y = 0 \iff y' = y$

l'ensemble des solutions de l'éq est les fonctions définies dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto Ce^x$; $C \in \mathbb{R}$

or $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$

et on a : $y_0 = Ce^{x}$; $C \in \mathbb{R}$

donc $1 = Ce^0 \iff \boxed{C = 1}$.

$\boxed{\text{Ainsi } y = e^x}$

2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.

a) Calculer $g(0)$.

On a $f(x) = e^x g(x) \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

donc $g(0) = \dfrac{f(0)}{e^0} = \ln(2)$.

Ainsi $\boxed{g(0) = \ln(2)}$.

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{x} g(x) + e^{x} g'(x)$.

$$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = e^{x} g(x) + e^{x} g'(x)}$$

3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

On f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow \cancel{e^x g(x)} + e^x g'(x) - \cancel{e^x g(x)} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow e^x g'(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x(1+e^x)} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : f \text{ est sol de } (E) \text{ ssi } g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}}$

NETSCHOOL1 ACADEMY

b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E).

on a $g'(x) = \dfrac{\overbrace{e^x}^{u'}}{\underbrace{1+e^x}_{u}} \Leftrightarrow g(x) = \ln(1+e^x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$

or $g(0) = \ln(2)$.

donc $\ln(1+e^0) + C = \ln(2)$.

$\Leftrightarrow \ln(2) + C = \ln(2)$.

$\Leftrightarrow \boxed{C = 0}$.

donc $\boxed{g(x) = \ln(1+e^x)}$.

or $f(x) = e^x g(x)$

Ainsi : $\boxed{f(x) = e^x \ln(1+e^x)}$.