EXERCICE N°2 :	15'	4 points	🌶️🌶️🌶️🌶️

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 10\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 3y = 0$.

$y' + 3y = 0 \iff y' = -3y$

l'ensemble des solutions de (E_0) est les fonctions définies dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto C e^{-3x}$; $(C \in \mathbb{R})$

NETSCHOOL1 ACADEMY

2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\cos x + \sin x$ est une solution de(E)

on a $g(x) = 3\cos x + \sin x$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = -3\sin x + \cos x$

on a : $g'(x) + 3g(x) = -\cancel{3\sin x} + \cos x + 9\cos x + \cancel{3\sin x}$.

$= 10\cos x$

Ainsi : la fonction g est une solution de (E).

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).

f est une solution de (E).

$\Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = 10\cos x$

or g est aussi solution de (E).

$\Leftrightarrow f'(x) + 3f(x) = g'(x) + 3g(x)$.

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 3\left(f(x) - g(x)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' + 3\left(f(x) - g(x)\right) = 0$.

$\boxed{\underline{\text{Ainsi}}\ (f-g) \text{ est solution de } E_0.}$

4) Déterminer alors la solution de l'équation (E) tel que $f(0) = 4$.

on a $(f-g)$ est solution de (E_0).

$\Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = C e^{-3x} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + C e^{-3x} \quad ; C \in \mathbb{R}$

or $\quad f(0) = 4$

$g(0) + C = 4 \Leftrightarrow 3 + C = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{C = 1}$.

$$\boxed{\underline{\text{Ainsi}}: \quad f(x) = 3\cos x + \sin x + e^{-3x}}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

5) Déduire une solution de l'équation (E_1) : $y'' + 3y' = 10\cos x$.

on a $y'' + 3y' = 10\cos x$

on pose $z = y' \iff z' + 3z = 10\cos x$

donc $z = 3\cos x + \sin x + Ce^{-3x}$

$(C \in \mathbb{R})$

donc $y' = 3\cos x + \sin x + Ce^{-3x}$

$C \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Ainsi}} : \quad y = 3\sin x - \cos x - \frac{1}{3}Ce^{-3x} + k \\ \text{avec } C \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{R}\end{array}}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY