EXERCICE N°1 :	**15'**	**4 points**	

NETSCHOOL1
ACADEMY

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$

on a : $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$

l'ensemble des solutions de cette équation est les fonctions définies dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{2x}$ $(C \in \mathbb{R})$.

2) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E).

on a $h(x) = 2xe^{2x} + 1$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$; $h'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$h'(x) - 2h(x) = 2e^{2x} + \cancel{4xe^{2x}} - \cancel{4xe^{2x}} - 2$$

$$= 2e^{2x} - 2$$

$$= 2\left(e^{2x} - 1\right).$$

$\boxed{\text{Ainsi } h \text{ est une solution de } (E).}$

NETSCHOOL1 ACADEMY

3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-h)$ est une solution de (E').

on a f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right)$.

or h est une solution de (E).

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = h'(x) - 2h(x)$.

$\Leftrightarrow f'(x) - h'(x) - 2\left(f(x) - h(x)\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \left(f(x) - h(x)\right)' - 2\left(f(x) - h(x)\right) = 0$.

$\Leftrightarrow f-h$ est une solution de (E').

Ainsi : f est une sol de (E) ssi $f-h$ est solution de (E').

NETSCHOOL1 ACADEMY

b) En déduire les solutions de (E).

on a $(f-h)$ est une solution de (E').

$\Leftrightarrow \quad f(x) - h(x) = C e^{2x} \; ; (C \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = C e^{2x} + h(x) \; ; \; C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 2x e^{2x} + 1 + C e^{2x} \; ; \; C \in \mathbb{R}$

Ainsi : les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme :

$$f(x) = 2x e^{2x} + 1 + C e^{2x} \; ; (C \in \mathbb{R})$$

4) Soit g la solution de (E) qui s'annule en 0 et soit C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Expliciter $g(x)$.

on a g est la solution de (E) qui s'annule en 0.

donc $g(x) = 2x e^{2x} + C e^{2x} + 1$

$(C \in \mathbb{R})$.

or $g(0) = 0 \iff C + 1 = 0$.

$\iff \boxed{C = -1}$.

Ainsi : $g(x) = 2x e^{2x} - e^{2x} + 1$.

$= (2x - 1) e^{2x} + 1$.

b) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que pour tout $x \leq \frac{1}{2}$ on a : $g(x) \leq 1$.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} - 1\right) e + 1 = 1.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } g\left(\frac{1}{2}\right) = 1}.$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) - 1 = (2x - 1) e^{2x}$

pour $x \leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2x \leq 1$

$\Rightarrow$ $2x - 1 \leq 0$

$\Rightarrow$ $(2x - 1) e^{2x} \leq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall x \leq \frac{1}{2} \text{ on a } g(x) \leq 1}$$

5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{1/2} |g(x) - 1|\, dx = \int_0^{1/2} 1 - g(x)\, dx$$

or g est une solution de (E) donc :

$$g'(x) - 2g(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right)$$

d'où $\boxed{g(x) = \frac{g'(x)}{2} - e^{2x} + 1}$.

Par la suite $\mathcal{A} = \int_0^{1/2} \cancel{1} - \frac{g'(x)}{2} + e^{2x} \cancel{- 1}\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} g'(x) + \int_0^{1/2} e^{2x}\, dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\left[g(x)\right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0)\right) + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - 0) + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}.$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e}{2} - 1. \quad (4.a).$$

Ainsi : $A = \frac{e}{2} - 1 \quad (4.a).$

NETSCHOOL1 ACADEMY