EXERCICE N°4 :	40'	6 points	

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.

on a $z = y - xe^x - 1$ donc $z' = y' - e^x - xe^x$

or y est une solution de (E)

$\iff y' - y - e^x + 1 = 0 \iff y' = y + e^x - 1$

$\iff z' = y + \cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x} - xe^x$

$= y - xe^x - 1 = z$.

donc z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.

b) Déterminer alors z en fonction de x.

On a $z' = z$

l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est les fonctions définies dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \longmapsto Ce^{x}}$$

2) Déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

on a : $z = y - xe^x - 1$ et $z = Ce^x$

$\Leftrightarrow y - xe^x - 1 = Ce^x$

$\Leftrightarrow y = Ce^x + xe^x + 1$

pour $x = 0$ et $y = 0$

$\Leftrightarrow 0 = C + 0 + 1$.

$\Leftrightarrow \boxed{C = -1}$.

donc $y = -e^x + xe^x + 1$

$= (x-1)e^x + 1$

$= f(x)$.

donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x-1)e^{x} + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans en repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{x} + 1.$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \overset{0}{\overline{x e^{x}}} - \overset{0}{\overline{e^{x}}} + 1.$$

$$= 1.$$

$\boxed{\text{Ainsi la dte d'équation } y = 1 \text{ est asymptote à } C_f \text{ au } V(-\infty).}$

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) - 1 = (x-1)e^x + 1 - 1$

$= (x-1)e^x$

le signe de $f(x) - y$ est celui de $(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-1$		$-$	0	$+$	
P-R de $\mathcal{C}$ et Δ		$\mathcal{C}_f$ au dessous de Δ	$(1,1)$ intersection	$\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ.	

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{(x+1)}^{\to +\infty} e^{\overset{\to +\infty}{x}} + 1 .$$

$$= \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^{x} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\frac{x+1}{x}}^{1} e^{\overset{\to +\infty}{x}} + \overbrace{\frac{1}{x}}^{0}$$

$$= \boxed{+\infty}$$

Ainsi C_f admet une Branche Parabolique de direction celle de $(O\vec{j})$ au $V(+\infty)$.

4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.

on a f est solution de (E)

donc $f'(x) - f(x) - e^x + 1 = 0$.

et par suite $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$

$$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \forall x \in \mathbb{R} \, ; \quad f(x) - 1 = f'(x) - e^x}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - 1| \, dx = \int_0^1 1 - f(x) \, dx$$

$$\boxed{\text{Car } f(x) - 1 < 0 \quad \forall x \in [0,1]}$$

$$= \int_0^1 e^x - f'(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 e^x \, dx - \int_0^1 f'(x) \, dx$$

$$= \left[e^x\right]_0^1 - \left[f(x)\right]_0^1$$

$$= e - e^0 - \left(f(1) - f(0)\right)$$

$$= e - 1 - 1 + 0 = e - 2 \ (\text{u.a})$$

Đính: $A = e - 2$ (4.a)