EXERCICE N°3 :	40'	6 points	🌶🌶

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$.

on a : $9y'' + \pi^2 y = 0 \iff y'' + \frac{\pi^2}{9} y = 0$

$\iff y'' + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 y = 0$.

l'ensemble des solutions de cette équation est les fonctions définies dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \longmapsto A \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{3} x\right)}$$

$(A,B) \in \mathbb{R}^2$

2) On désigne par f la solution particulière de (E) et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer f sachant que le point $A(1, -\sqrt{2}) \in C_f$ et que C_f admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

on a f est une solution de (E)

$\iff f(x) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

et f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -\frac{\pi}{3}A\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

on a $\begin{cases} A(1, -\sqrt{2}) \in C_f \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} A\cos\left(\pi/3\right) + B\sin\left(\pi/3\right) = -\sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{3}A\sin\frac{\pi}{3} + B\,\pi/3\cos\frac{\pi}{3} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = -\sqrt{2} \\ -\pi/3\,A\frac{\sqrt{3}}{2} + B\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = 0. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = -\sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{6}A\sqrt{3} + B\frac{\pi}{6} = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + \sqrt{3}B = -2\sqrt{2} \\ -A\sqrt{3} + B = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + 3A = -2\sqrt{2}. \\ B = A\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A = -2\sqrt{2} \\ B = A\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ B = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \quad f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) - \frac{\sqrt{6}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} x\right)}$

NETSCHOOL1
ACADEMY

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.

on a $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)$$

or $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

donc :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right)$

4) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2\,,-1]$.

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$$

$$\overline{f} = \frac{1}{-1-(-2)} \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx .$$

$$= \int_{-2}^{-1} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right) dx .$$

$$= \sqrt{2}\int_{-2}^{-1} \cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right) dx .$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\pi/3}\sin\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right)\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{3}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin(0) \right).$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{3}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{2\pi}$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad \overline{f} = \frac{3\sqrt{6}}{2\pi}}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY