EXERCICE N°1 :	15'	4 points	🌶️

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$

$y'' + y = 0 \iff y'' + 1^2 y = 0$.

l'ensemble des solutions de cette équation est les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in IR$; $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

on a : $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.

$g(x) = \cos x$ donc $g'(x) = -\sin x$

$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

on a donc $g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin x$

$= 0$.

$\boxed{\text{donc la fonction } g \text{ est un élément de } E.}$

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

on a f un élément de $E \Leftrightarrow f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow f'(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

or f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $f''(x) = -\left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)'$

$\Rightarrow f''(x) = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Rightarrow f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

on a f est un élément de E $\Leftrightarrow f'(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

alors $f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x)$

or $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

alors $f''(x) = -f(x)$.

donc $f''(x) + f(x) = 0$.

Ainsi f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

on a si f est un élément de E $\Rightarrow$ f est une solution de l'équation $y'' + y = 0$.

Alors l'ensemble E est l'ensemble des fonctions f tq $f(x) = A\cos x + B\sin x$

$(A, B) \in \mathbb{R}^2$