EXERCICE N°6 :	40'	6 points	

1) Résoudre les équations différentielles $(E) : y' + y\ln 2 = \ln 2$ et $(E') : y'' + \pi^2 y = 0$

$E : y' = ay + b \ ; (a,b) \in \mathbb{R}^2$

l'ensemble des solutions de E est les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$(C \in \mathbb{R})$

$$y' + y\,\mathrm{Ln}(2) = \mathrm{Ln}(2) \iff y' = -y\,\mathrm{Ln}(2) + \mathrm{Ln}(2)$$

l'ensemble des solutions de (E) est les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto C e^{-\mathrm{Ln}(2)x} + 1 \ . \ C \in \mathbb{R}$

c'à d : $x \longmapsto C e^{\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2^x}\right)} + 1 \ . \ C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{: \ x \longmapsto C \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \ . \ C \in \mathbb{R}}$$

$(E') : y'' + \pi^2 y = 0$.

$E : y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}^*)$

l'ensemble des solutions de E est les fonctions déf dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$x \longmapsto A\cos \omega x + B \sin \omega x$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

l'ensemble des solutions de (E') est les fonctions définie dérivable sur $\mathbb{R}$

par : $x \longmapsto A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

$(A,B) \in \mathbb{R}^2$

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g solutions respectivement des équations (E) et (E').

a) Reconnaitre la courbe de f et celle de g.

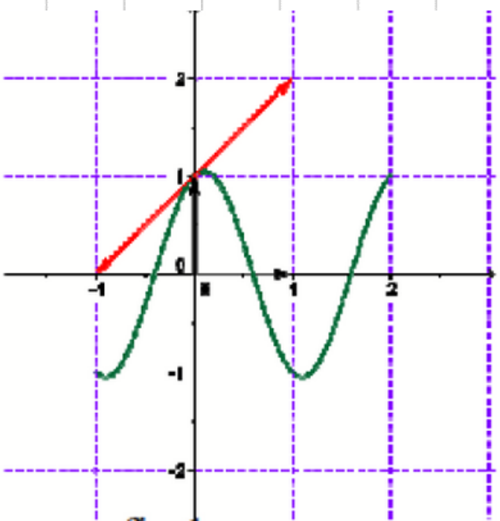

fig 1

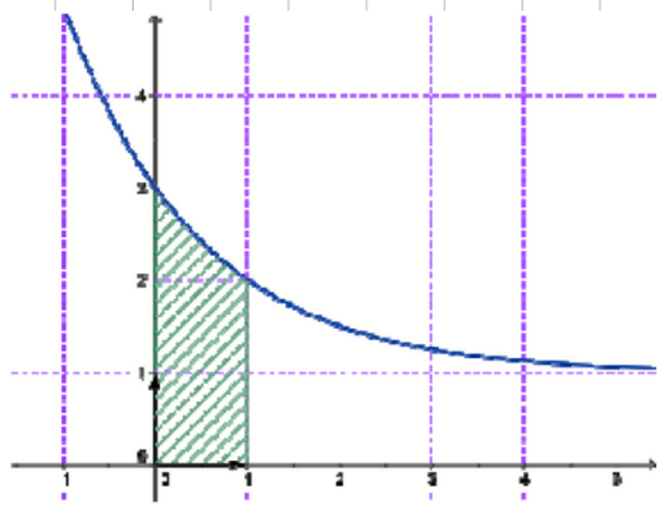

fig 2

la Courbe de la figure (1) est celle d'une fonction trigonométrique donc celle de $g(x) = A\cos(\pi x) + B\sin(\pi x)$

par Conséquent la figure (2) est celle de $f(x) = C\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

b) Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.

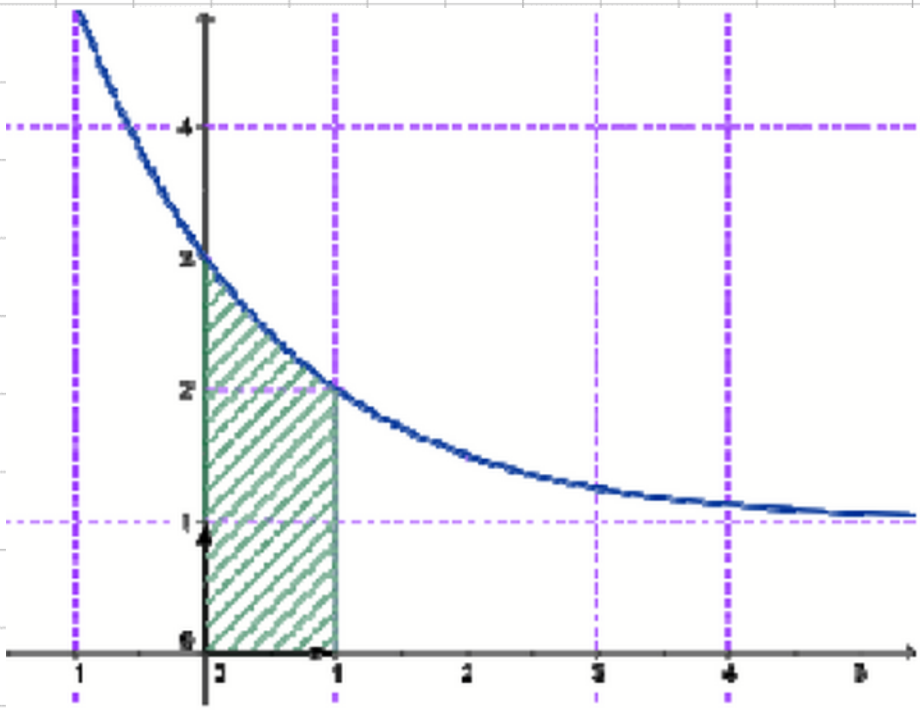

fig 2

la Courbe de f passe par le point

$(0,3) \Rightarrow f(0) = 3$,

$\Leftrightarrow f(0) = c\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 = 3$

$\Leftrightarrow c + 1 = 3 \Leftrightarrow \boxed{c = 2}$.

Ainsi : $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1$.

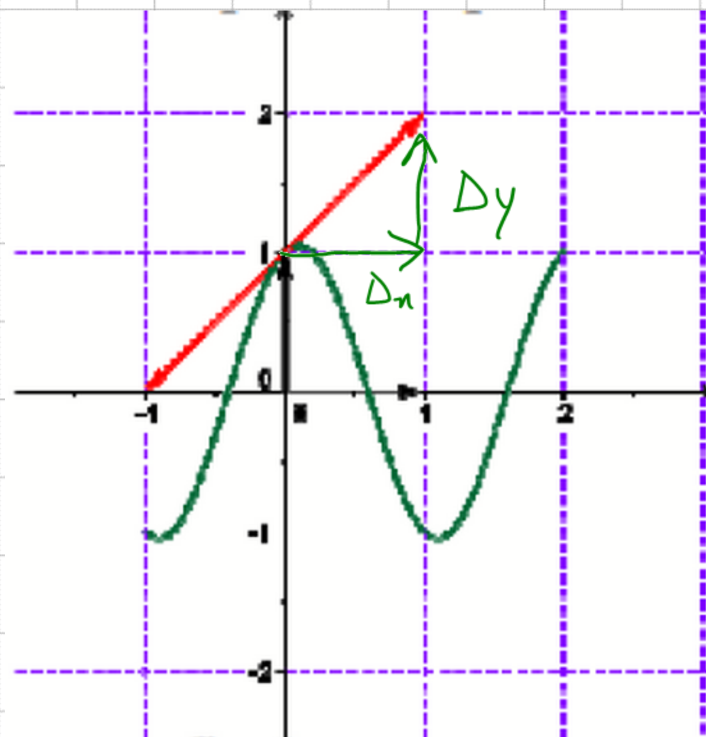

fig 1

La courbe de g passe par le point $(0,1)$ et admet en 0 une tgte de pente 1.

or g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad g'(x) = -A\pi \sin(\pi x) + B\pi \cos(\pi x)$$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A\cos 0 + B\sin(0) = 1 \\ -A\pi \sin(0) + B\pi \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

donc $\boxed{g(x) = \cos(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi x)}$

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan colorée sur la figure 2.

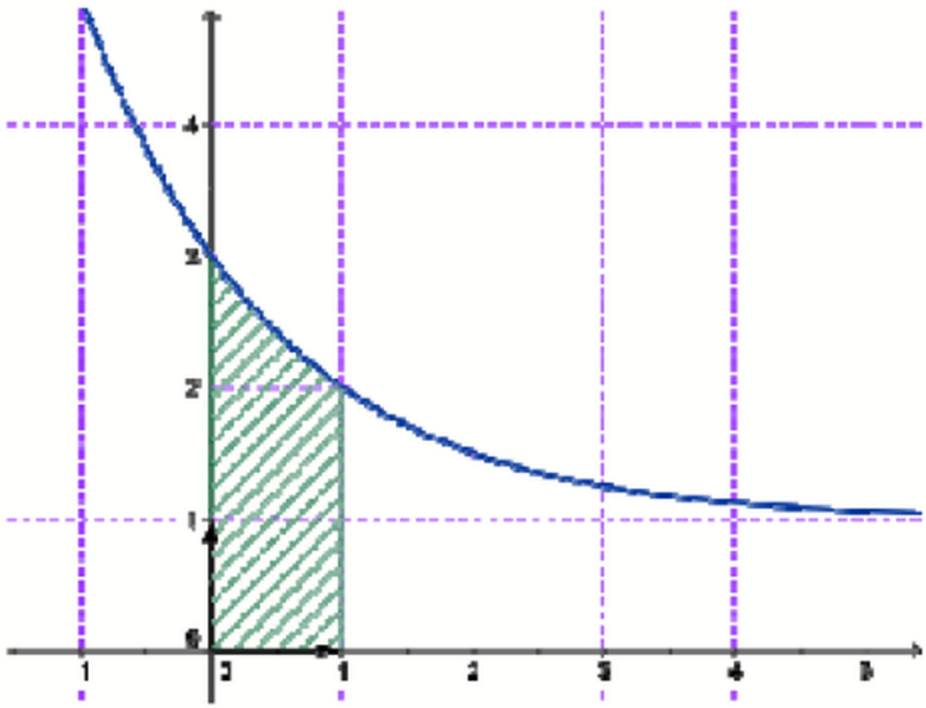

fig 2

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\boxed{\text{Car } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0}$.

f est une solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) + f(x)\ln(2) = \ln(2)$.

$$(\Longleftrightarrow) \quad f(x) = 1 - \frac{f'(x)}{\ln(2)}.$$

Donc

$$A = \int_0^1 1 - \frac{f'(x)}{\ln(2)} \, dx$$

$$= \int_0^1 dx - \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 f'(x)\, dx.$$

$$= \left[x\right]_0^1 - \frac{1}{\ln(2)} \left[f(x)\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{\ln(2)} \left(f(1) - f(0)\right).$$

$$= 1 - \frac{1}{\ln(2)} \left(2 - 3\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\ln(2)} \quad (\text{u.a})$$

$$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \quad A = 1 + \frac{1}{\ln(2)} \quad (\text{u.a})}$$