EXERCICE N°5 :	40'	6 points	🌶🌶🌶🌶

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

$y' + y = 0 \iff y' = -y$

l'ensemble des solutions de (E_0) est les fonctions déf dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto C e^{-x}$; $(C \in \mathbb{R})$

2) Soit la fonction $g(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels. Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E).

on a g est dérivable sur $\mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = a$

g est une solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x) + g(x) = x$

$\Leftrightarrow a + ax + b = x$

$\Leftrightarrow ax + a + b = x$

par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{g(x) = x - 1}$$

NETSCHOOL1
ACADEMY

3) **a)** Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).

f est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $f'(x)+f(x)=x$

$\Leftrightarrow$ $f'(x)+f(x)=g'(x)+g(x)$.

$\Leftrightarrow$ $(f'(x)-g'(x))+(f(x)-g(x))=0$.

$\Leftrightarrow$ $(f(x)-g(x))'+(f(x)-g(x))=0$.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{(f-g) \text{ est solution de } (E_0)}$

b) Expliciter $f(x)$ sachant que C_f courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. passe O.

on a $f - g$ est solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = C e^{-x}$; $C \in \mathbb{R}$

donc les solutions de E sont les fctions f tq $f(x) = g(x) + C e^{-x}$

donc $f(x) = x - 1 + C e^{-x}$; $C \in \mathbb{R}$

or C_f passe par O donc $f(0) = 0$.

donc $-1 + C = 0 \Leftrightarrow \boxed{C = 1}$.

Ainsi : $\boxed{f(x) = x - 1 + e^{-x}}$

4) Calculer $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x - 1 + e^{-x}\,dx.$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x - e^{-x}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{4}{2} - 2 - e^{-2}\right) - \left(0 - 0 - \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{e^{0}}\right)$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} - e^{-2} + 1.$$

$$= 1 - e^{-2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \int_0^2 f(x)\,dx = 1 - e^{-2}.}$$