EXERCICE N°4 :	40'	6 points	🌶️🌶️

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 5\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.

$y' + 2y = 0 \iff y' = -2y$

l'ensemble des solutions de E' est les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$x \longmapsto C e^{-2x} \;;\; C \in \mathbb{R}$

2) Soit $g(x) = a\cos x + b\sin x$. Déterminer les réels a et b pour que g soit une solution de l'équation (E).

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$$

g est solution de $(E) \iff g'(x) + 2g(x) = 5\cos x$

$\iff -a\sin x + b\cos x + 2(a\cos x + b\sin x) = 5\cos x$

$\iff -a\sin x + b\cos x + 2a\cos x + 2b\sin x = 5\cos x$

$\iff (b+2a)\cos x + (2b-a)\sin x = 5\cos x$

par identification :

$$\begin{cases} b+2a = 5 \\ 2b-a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5b = 5 \\ a = 2b \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

donc $\boxed{g(x) = 2\cos x + \sin x}$

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E').

f est solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=5\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x) = g'(x)+2g(x)$.

$\Leftrightarrow \left(f'(x)-g'(x)\right)+2\left(f(x)-g(x)\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)'+2\left(f(x)-g(x)\right)=0$.

$\Leftrightarrow \boxed{(f-g) \text{ est solution de } (E')}$.

NETSCHOOL1
ACADEMY

4) En déduire les solutions de (E).

on a $(f-g)$ est solution de E'

donc $f(x) - g(x) = C e^{-2x}$; $(C \in \mathbb{R})$

donc les solutions de (E) sont les fonctions

f tq $f(x) = g(x) + C e^{-2x}$; $(C \in \mathbb{R})$

donc $f(x) = 2\cos x + \sin x + C e^{-2x}$

$C \in \mathbb{R}$

NETSCHOOL1 ACADEMY