EXERCICE N°3 :	**40'**	**6 points**	🌶️🌶️🌶️🌶️

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = -(x-1)^2$.

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = 2ax + b$

on a g est une solution de E $\Leftrightarrow$

$g'(x) - g(x) = -(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 2ax + b - ax^2 - bx - c = -x^2 + 2x - 1$

$\Leftrightarrow -ax^2 + x(2a - b) + b - c = -x^2 + 2x - 1$

Par identification :

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

donc $\boxed{g(x) = x^2 + 1}$.

2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0): $y' - y = 0$.

on a : $y' - y = 0 \iff y' = y$

donc l'ensemble des solutions sont les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{x \longmapsto C e^{x} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}}$$

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).

f est solution de $(E) \iff f'(x) - f(x) = -(x-1)^2$

$\iff f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$.

$\iff f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x)$.

$\iff (f(x) - g(x))' = f(x) - g(x)$.

$\iff (f(x) - g(x))' - (f(x) - g(x)) = 0$.

$\iff$ $\boxed{f-g \text{ est solution de } (E_0)}$.

4) Déterminer alors les solutions de (E).

On a : $(f-g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = C e^{x}$; $C \in \mathbb{R}$

donc les solutions de (E) sont les fonctions f tq $f(x) = g(x) + C e^{x}$

$\boxed{\underline{\text{Ainsi}} : \quad f(x) = x^2 + 1 + C e^{x} \; ; \; C \in \mathbb{R}}$

NETSCHOOL1 ACADEMY