EXERCICE N°2 :	40'	6 points	🌶🌶

Soit l'équation différentielle (E): $y' - y = -x^2 + 3$

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.

$y' - y = 0 \iff y' = y$

l'ensemble des solutions de E' est les fonctions déf dérivables sur $\mathbb{R}$ par

$\boxed{x \longmapsto Ce^{x}}$; $C \in \mathbb{R}$.

2) Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$, déterminer les réels a, b et c tel que g soit solution de (E).

on a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$g'(x) = 2ax + b$$

g est solution de $E \iff g'(x) - g(x) = -x^2 + 3$

$\iff 2ax + b - ax^2 - bx - c = -x^2 + 3$.

$\iff -ax^2 + x(2a - b) + b - c = -x^2 + 3$

Par identification :

$$\begin{cases} -a = -1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1. \\ b = 2 \\ c = -1. \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{g(x) = x^2 + 2x - 1}$.

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est solution de (E').

f est Solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = -x^2+3$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$.

$\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x)$.

$\Leftrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' = f(x) - g(x)$.

$\Leftrightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' - \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f-g \text{ est Solution de } E'}$

4) En déduire les solutions de (E).

on a : $(f-g)$ est une solution de E'

donc $f(x) - g(x) = C e^{x}$; $(C \in \mathbb{R})$

donc les solutions de (E) sont les

fonctions f tq $f(x) = g(x) + C e^{x}$

$C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{donc } f(x) = x^2 + 2x - 1 + C e^{x} \quad C \in \mathbb{R}.}$$