Continuité sur un intervalle.

Ce qu'on doit apprendre :

- toute fonction **polynôme** est continue sur $\mathbb{R}$
- Soit f et g deux fonctions définie sur un intervalle I.

Si f et g sont continues sur I alors les fonctions $f+g$; $f \times g$; αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue sur I.

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } I \\ g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$

alors : $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{1}{g^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continue sur I.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$

alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Exemples : Soit $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$; $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

et $h(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2x-1}{x-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$.

déterminer le domaine de continuité de chacune des fonctions f ; g ; $u=f\cdot g$;

$V=|f(x)|$; $w=f^5$; $t=\sqrt{f}$ et h.

Rep :

- f est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son domaine de définition c'à d $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$.
- g est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son domaine de définition c'à d $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3\}}$.
- f et g sont continue sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}}$

alors $u=f\times g$ est continue sur

$\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}}$

- f est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$

donc $v = |f|$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$.

- f est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$

donc $w = f^5$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$.

-

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\boxed{+}$	0	$-$	||	$\boxed{+}$	

f est continue positive sur chacun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $]2,+\infty[$

donc $\sqrt{f}$ est continue sur :

$$\boxed{]-\infty,-1] \cup]2,+\infty[}$$

- La fonction $x \longmapsto 2x-4$ est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\boxed{\mathbb{R} \cap [1,+\infty[= [1,+\infty[}$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en particulier

Sur $\boxed{(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap]-\infty, 1[) =]-\infty, 1[}$

Ainsi h est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $[1, +\infty[$

Continuité à gauche en 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$$

donc h n'est pas continue à gauche en 1

$\boxed{\text{Concl:}}$ h est continue sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$