

Exercice n°1 :

- 1) Montrer que quelque soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
- 2) a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'équivalence : $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} & \text{ou} & 2z\bar{z} = z + \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$
- b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$.
- 3) Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $|a - b| = |1 - \bar{a}b| \Leftrightarrow |a| = 1$ ou $|b| = 1$.

Exercice n°2 :

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$ et montrer que les points images des solutions autre que 0 forment un triangle équilatéral.
- 2) Soient a et b deux nombres complexe tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \cdot b \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $Z = \frac{a+b}{1+a \cdot b}$ est un nombre réel.
- 3) Soit α un nombre complexe non nul donné. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que l'on ait $(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 4\alpha\bar{\alpha}$.
- 4) Soient u, v et w trois complexes tel que $|u| = |v| = |w| = 1$ et que $u + v + w \neq 0$. Montrer que le nombre complexe $\frac{uv+uw+vw}{u+v+w}$ a pour module 1.
- 5) Soit α un nombre complexe tel que $\alpha^5 = 1$ et $\alpha \neq 1$.
Montrer que $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha(\alpha + 1)$.

Exercice n°3 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, on désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives :
 i ; $Z' = \cos \theta + i(1 + \sin \theta)$ et $Z'' = \cos \theta + i(1 - \sin \theta)$.

- 1) a) Déterminer l'ensemble M' lorsque θ décrit $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.
- b) On note I le milieu du segment $[M'M'']$. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.
- 2) Mettre Z' et Z'' sous forme trigonométrique.
- 3) a) Montrer que $AM'M''$ est un triangle isocèle en A .
- b) Déterminer θ pour que le triangle $AM'M''$ soit équilatéral.

Exercice n°4 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on pose $Z = -\cos^2(\theta) - i \cos(\theta) \sin(\theta)$ et $Z' = -\sin^2(\theta) + i \cos(\theta) \sin(\theta)$. On désigne par M et M' les images respectives de Z et Z' , et par I le milieu du segment $[MM']$.

- 1) Déterminer l'affixe du point I .
- 2) Montrer que OMM' est un triangle rectangle en O .
- 3) a) Montrer que $\left| Z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$
- b) En déduire sur quel ensemble varie le point M puis le point M' .

- 4) Soit A le point d'affixe -1 .
- Montrer que $OMAM'$ est un rectangle.
 - Déterminer θ pour que $OMAM'$ soit un carré.

Exercice n°5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par A et K les points d'affixes respectives 1 et $1 + i$ et pour I et J les points d'affixes respectives i et $-i$.

- On désigne par \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1 . Soit N un point de \mathcal{C} distinct de I et de J . On note $(\vec{u}, \widehat{ON}) \equiv t[2\pi]$.
 - Quelle est la nature du triangle INJ ?
 - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$, le nombre $\frac{e^{it+i}}{e^{it-i}}$ est imaginaire pur.
- On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon 1 . Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - Tracer Γ et son image Γ' par la rotation r sur une même figure qui sera complétée par la suite.
 - On note M' l'image par r d'un point quelconque M du plan. Exprimer l'affixe Z' de M' en fonction de l'affixe Z de M .
 - Déterminer l'antécédent H de K par r .
- Dans cette question M est un point quelconque de Γ distinct de K et d'affixe Z . On note $(\vec{u}, \widehat{OM}) \equiv \theta/2[2\pi]$.
 - Vérifier que $Z = 1 + e^{i\theta}$.
 - Montrer que $\frac{Z' - (1+i)}{Z - (1+i)} = i \frac{e^{i\theta+i}}{e^{i\theta-i}}$
 - Montrer que les points M, K et M' sont alignés.
 - En déduire une construction du point M' connaissant M .

Exercice n°6 : On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E): z^3 + i(1 - z)^3 = 0$

- Soit a une solution (E)
 - Montrer que $|a| = |1 - a|$
 - En déduire que $1 - a = \bar{a}$. (On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C} ; |z|^2 = z\bar{z}$).
- Soit a une solution de (E) ; on pose $a = re^{i\alpha}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi, \pi[$
 - Montrer que $r = \frac{1}{2 \cos \alpha}$; En déduire que $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
 - Montrer que $r^3 e^{3i\alpha} + ir^3 e^{-3i\alpha} = 0$; En déduire les valeurs possibles de α .
- Factoriser $z^3 + i(1 - z)^3$
 - En déduire que $z^3 + i(1 - z)^3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(1 + i)$ ou $z^2 + (2i - 1)z - i = 0$
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + (2i - 1)z - i = 0$
 - Déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12}$