Serie d'exercices

Thème : Etude de fonctions ID=S

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_0 a la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position par rapport à C_f .
3. Soit la parabole P d'équation : $y = x^2 - 2x + 1$.
   a) Préciser les éléments caractéristiques de P.
   b) Vérifier que le point A(2 ; 1) est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P .
   c) Etudier la position de C_f par rapport a P.
4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Exercice n°2

Pour chacune des fonctions suivantes
- Expliciter l'ensemble de définition
- Déterminer le domaine de dérivabilité.
- Calculer la dérivée.
- Déterminer le sens de variation de f.

a. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x(1 - 3x^2)^3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 6}{x - 1}, \end{cases}$

c. $\begin{cases} [-\pi \; ; \; \pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \sqrt{2\cos x - 1} \end{cases}$

Exercice n°3

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1}$; α et β étant deux réels que l'on déterminera.
2. Etudier les variations de f. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).
4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).
5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) .

Exercice n°4

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé R$=(O;\vec{i},\vec{j})$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soient les points de Γ : A (1 ; 0) et A'(–1 ; 0).

1. Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A' on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overline{OH} = x$. Calculer l'aire du triangle AMM'.
2. Soit f la fonction définie sur [–1 ; 1] par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans R (unités graphiques 4 cm).

a. Etudier la dérivabilité de f en à droite en –1 et à gauche en 1. Interpréter les résultats obtenus

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Tracer (C).

3. Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.
4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) et donner en le justifiant une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

b. Discuter graphiquement suivant les valeurs de m réel le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On considère la courbe (U) donnée par l'équation $y^2 - (1 - x)^2(1 - x^2) = 0$. Montrer que (U) est constituée de deux courbes (C) et (C') , (C') étant l'image de (C) par une transformation que l'on précisera.

Correction de la serie SE4S0002

ID=CS4S0002

Exercice n°1

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. T_0 : $y = -3x - 1$

$f(x) - (-3x - 1) = x^3$

Pour $x \leq 0$, $f(x) - (-3x - 1) \leq 0$ la courbe est au dessous de la tangente

Pour $x \geq 0$, $f(x) - (-3x - 1) \geq 0$ la courbe est au dessus de la tangente

3. Soit la parabole P : $y = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow y - 0 = (x - 1)^2$.

a) P est une parabole de sommet S(1;0) , d'axe la droite D : x = 1.

b) $2^3 - 3 \times 2 - 1 = 1$ et $2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

donc le point A(2 ;1) est un point des deux courbes C_f et P .

c) $f(x) - (x^2 - 2x + 1) = x^3 - 3x - 1 - x^2 + 2x - 1 = x^3 - x^2 - x - 2$

On verifie que 2 est racine du polynôme $x^3 - x^2 - x - 2$.

$$x^3 - x^2 - x - 2 = x^2(x - 2) + 2x^2 - x^2 - x - 2 = x^2(x - 2) + x^2 - x - 2$$

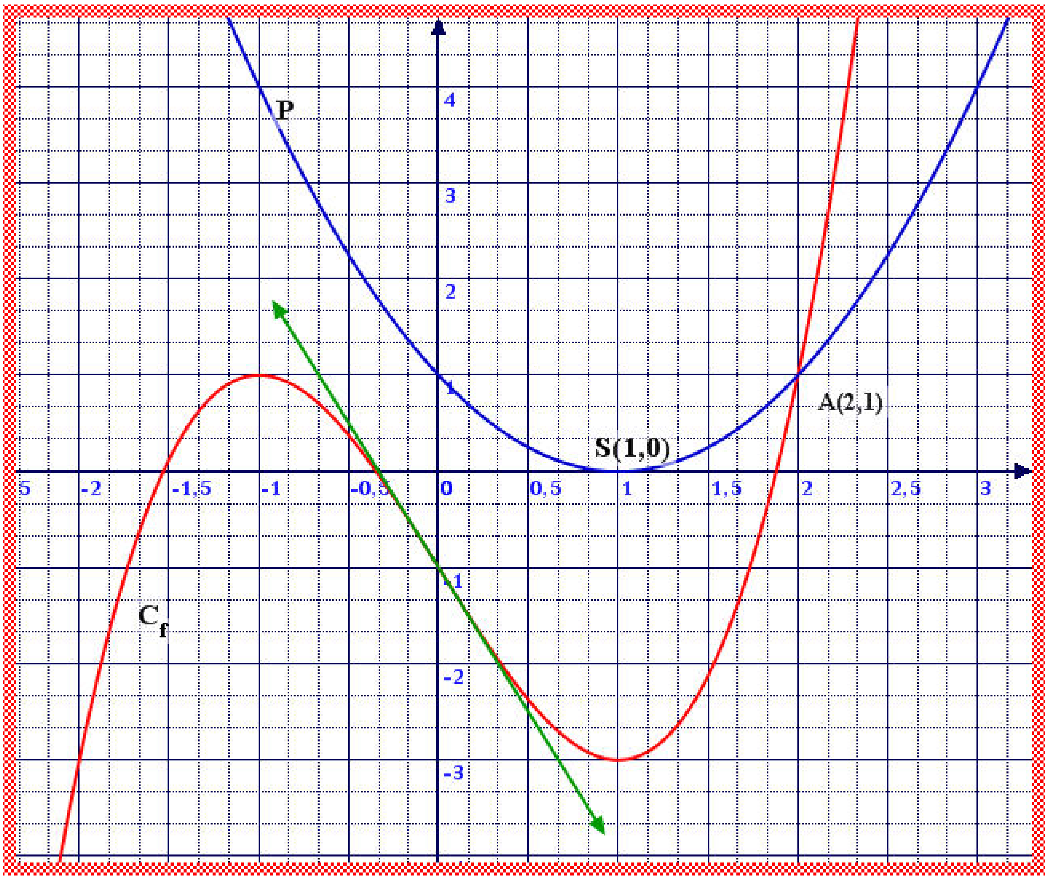
$$= x^2(x - 2) + (x - 2)(x + 1) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$$

$f(x) - (x^2 - 2x + 1)$ admet le signe de $x - 2$

Pour $x \leq 2$, $f(x) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0$ donc la courbe C_f est au dessous de P

Pour $x \leq 2$, $f(x) - (x^2 - 2x + 1) \geq 0$ donc la courbe C_f est au dessus de P

4.



Exercice n°2

a. $f(x) = 2x(1-3x^2)^3$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$f'(x)$

$= 2(1-3x^2)^3 + 2x \times 3 \times (-6x) \times (1-3x^2)^2$

$= 2(1-3x^2)^2(1-3x^2-18x^2)$

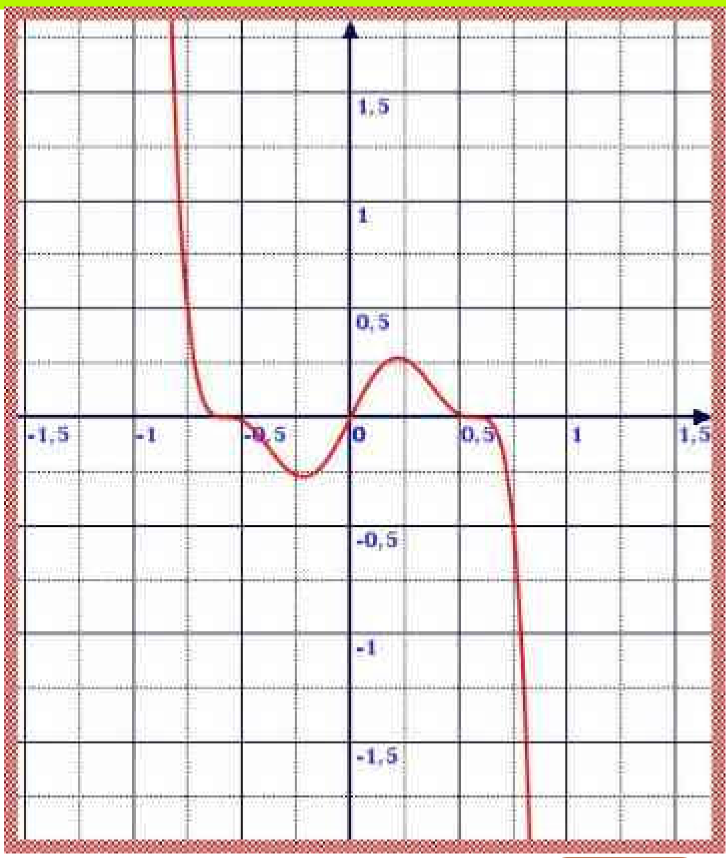
$= 2(1-3x^2)^2(1-21x^2)$

$= 2(1-3x^2)^2(1-\sqrt{21}x)(1+\sqrt{21}x)$

f' est positive sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{21}} ; \frac{1}{\sqrt{21}}\right]$

donc f est croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{21}} ; \frac{1}{\sqrt{21}}\right]$.

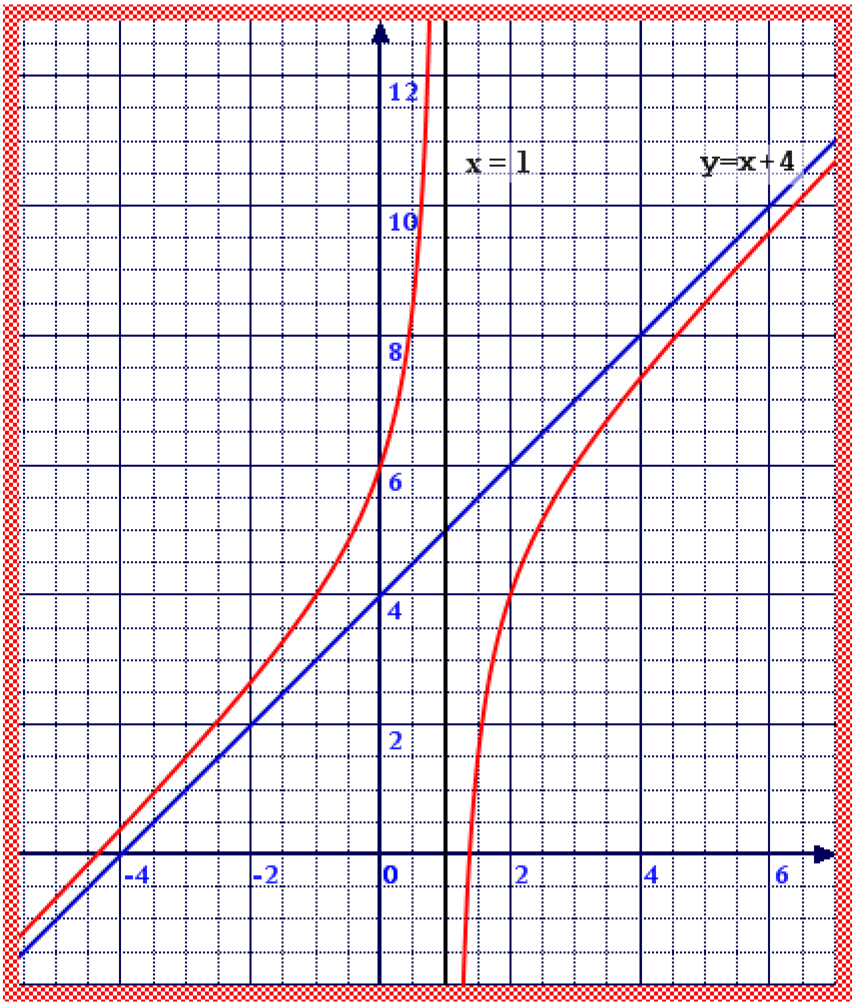
Elle est décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{21}}, +\infty\right[$.



b. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-6}{x-1}$. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x-6)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+6}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

Le numérateur est un polynôme du second degré qui ne s'annule jamais (car $\Delta < 0$) et le dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement positive et la fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$



$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2+3x-6}{x^2-x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4x-6}{x-1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4x}{x}=4$$

Donc la droite d'équation $y=x+4$ est une asymptote à la courbe de f

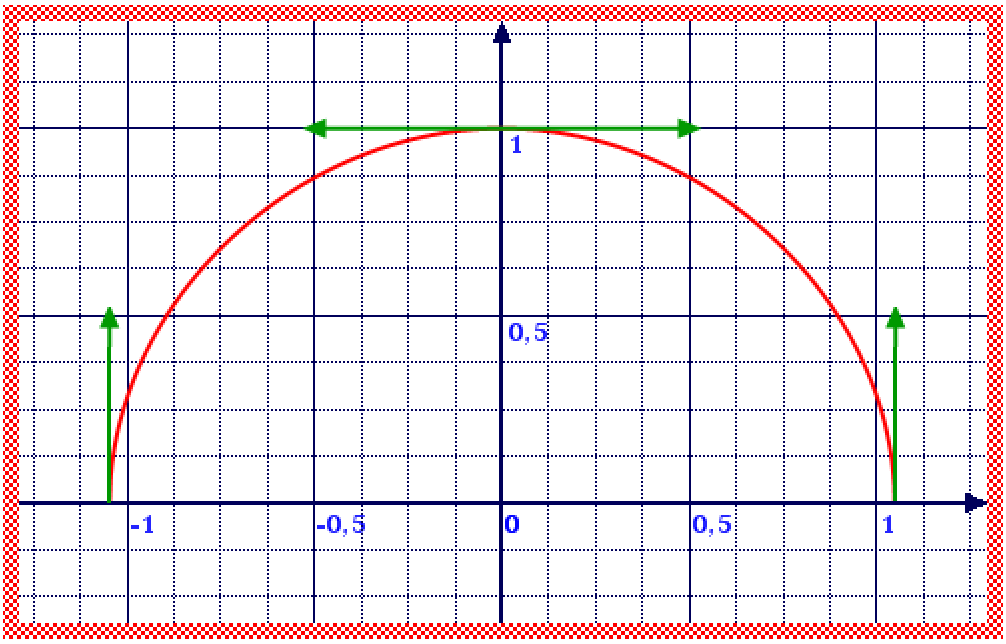
c. $f(x)=\sqrt{2\cos x-1}$. Il faut étudier le signe de $2\cos x-1$.

$$2\cos x-1\ge 0 \Leftrightarrow 2\cos x\ge 1 \Leftrightarrow \cos x\ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le \frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

f est donc définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$ dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

$$f(x)=\sqrt{2\cos x-1}=(2\cos x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times(-2\sin x)(2\cos x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-\sin x}{\sqrt{2\cos x-1}}$$



Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$, la dérivée est positive (sin$x$ est négatif) donc f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, f est décroissante.

Exercice n°3

Partie A

$\varphi(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ la courbe représentative de φ est tangente à T en I si $\varphi(0) = 3$ et $\varphi'(0) = 4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0) = b = 3$ et $\varphi'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + 3)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = a = 4$.

Partie B

1. $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha(x^2 + 1) + \beta x}{x^2 + 1} = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}{x^2 + 1} \Rightarrow \alpha = 3,\ \beta = 4$.

2. $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$ d'où les racines -1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 3$, asymptote horizontale $y = 3$.

3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$.

Le signe de $f(x) - (4x + 3) = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1} - 4x - 3 = \frac{4x - 4x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{-4x^3}{x^2 + 1}$ qui admet le signe de $-x$, donc (C) est au dessus de (T) pour $x \le 0$ et en-dessous pour $x \ge 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u, v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(2u - x) + f(x) = 2v$; ce qui donne : $f(x) + f(-x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1} + 3 - \dfrac{4x}{x^2+1} = 6$ donc $\Omega(0, 3)$